



量子計算の幾何学的最適制御 とデコヒーレンスの話題

Geometric control of quantum computer and
a topic on decoherence

谷村省吾

Shogo TANIMURA

大阪市立大学



共同研究者たち

- ⇒ 中原幹夫(近畿大学)
- ⇒ 近藤康(近畿大学)
- ⇒ 柴田文明(お茶の水大学)
- ⇒ 内山智香子(山梨大学)
- ⇒ 北島佐知子(筑波大学)
- ⇒ 参考論文: [quant-ph/0406038](#), [0411153](#)



力学と制御と計算

- ➡ 力学：投球，打球，砲弾
（人為が関与するのは初期条件のみ）
- ➡ 制御：ミサイル，人間のほとんどの動作
（目標となる終状態を心に決めて，現在の状態をモニターしながら調整を施す）
- ➡ 計算：筆算，そろばん，プログラム
（遷移規則と終条件からなるアルゴリズム）
- ➡ 証明は？



計算は自然現象のモデルではない

ある与えられた条件の下で原子が何をしでかすか。これを計算するには紙の上に記号を打ちつけて規則を作り、それを計算機に入れてやる。計算機のスイッチが開いたり閉じたり、何やら複雑な作動の後に結果がでて、原子がこれから何をするかわかってしまう！もしスイッチの開閉が何かの意味で原子の模型であるのだったら、つまり原子がスイッチを内臓していると思えというのだったら、私は多かれ少なかれ計算の過程を理解したといってよい。しかし、**数学というのは、その実、本物の振舞いとは何ら関係ない規則をたどることでもあります。**計算機の内部にあるスイッチの開閉は、自然界の現実とはまったく別物なのです。数学を操ることで予言ができるのだから、驚かすにはられません。（ファインマン「物理法則はいかにして発見されたか」江沢洋訳）



量子計算

- ⇒ 2状態系 $|0\rangle, |1\rangle$ 1量子ビット C^2
- ⇒ n 個のテンソル積 $C^{\{2^n\}}$ n 量子ビット
- ⇒ 初期化
- ⇒ $C^{\{2^n\}}$ の上でユニタリ変換
(ユニタリゲート)
- ⇒ 射影測定
- ⇒ 有利とされる点: ある種の並列処理

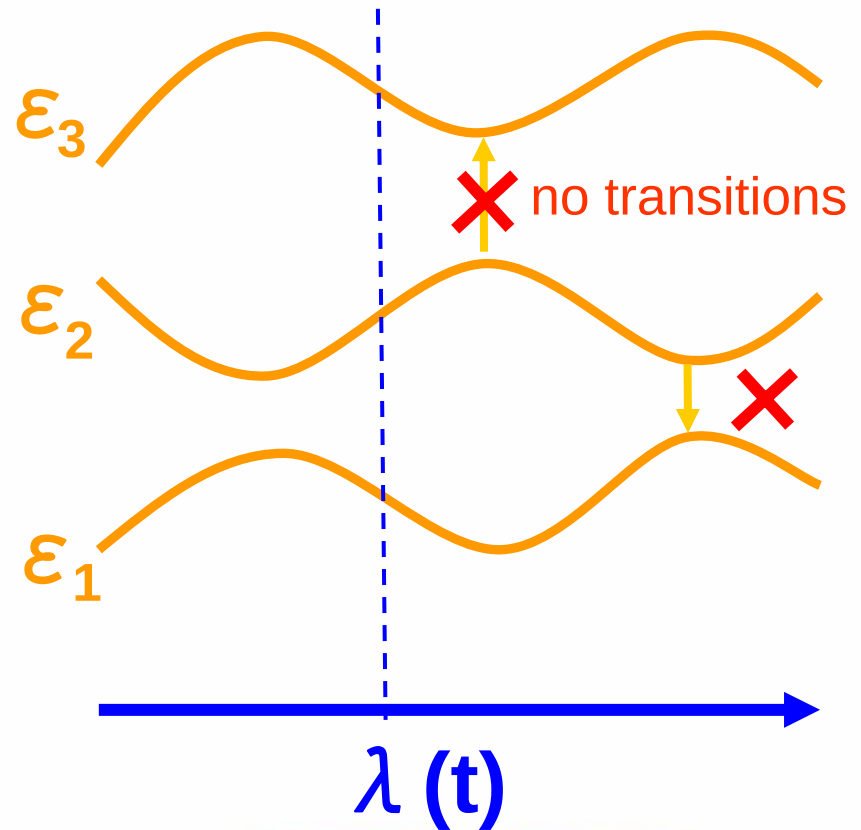


ホロノミック量子計算

- ⇒ Zanardi, Rasetti (1999) が提唱
- ⇒ Wilczek-Zee のホロノミー (Berry phase の非可換版) をユニタリゲートとして利用
- ⇒ メリット: 運動学的詳細に依存しない
- ⇒ 難点: エネルギー準位の縮退を保つことが難しい
- ⇒ もう一つ難点: 制御パラメータを決めること自体が面倒

断熱定理(準静的定理)

初期状態がエネルギー固有状態であり、ハミルトニアンをゆっくり変化させたならば、各時刻の状態は各時刻のハミルトニアン固有状態にとどまり続ける。



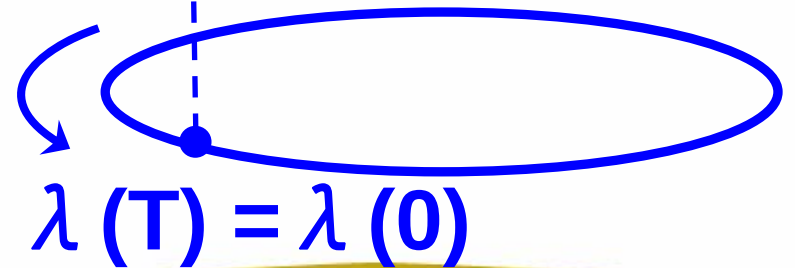
Berry phase

ハミルトニアンを外部パラメータを準静的に変化させて元の値に戻したとき、状態ベクトルが受ける位相の変化

$$\varepsilon(T) = \varepsilon(0)$$



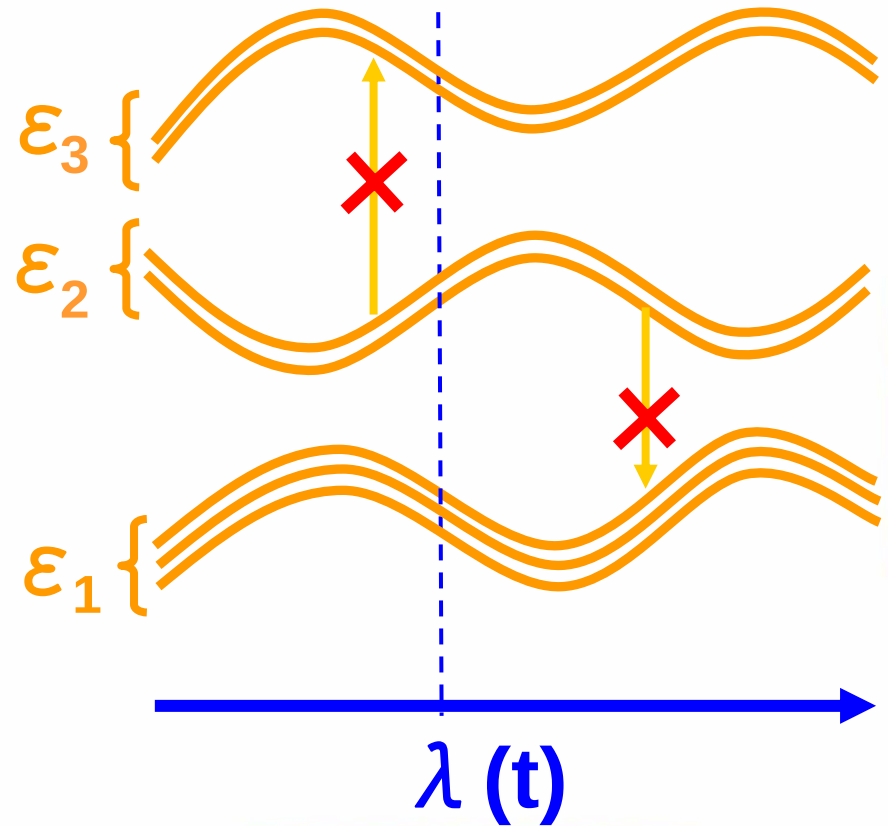
$$\psi(T) = e^{i\gamma} \psi(0)$$



$$\lambda(T) = \lambda(0)$$

縮退準位のある場合の断熱定理

ハミルトニアン of 外部パラメータを準静的変化させている間中, エネルギー準位の縮退が解けなければ, 状態は各時刻の縮退エネルギー準位にとどまり続ける.



Wilczek-Zee holonomy

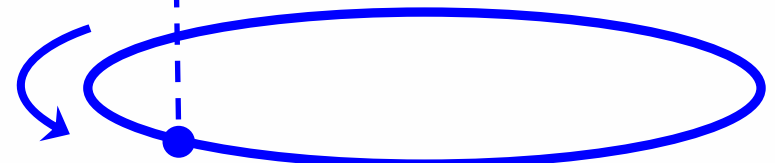
外部パラメータを準静的に変化させている間, k 重縮退が保たれていれば, 状態ベクトルは k 次元のユニタリ変換 Γ を受ける.

$$\varepsilon(T) = \varepsilon(0)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{bmatrix}$$



$$\psi(T) = \Gamma \psi(0)$$



$$\lambda(T) = \lambda(0)$$

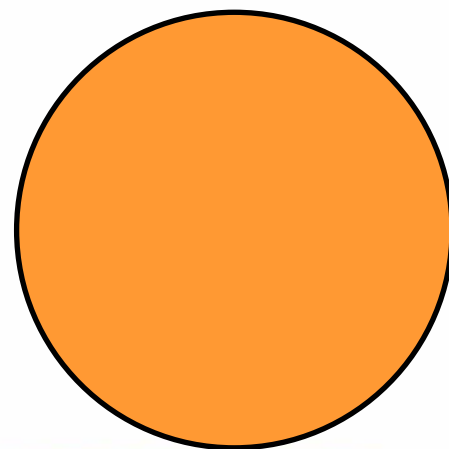
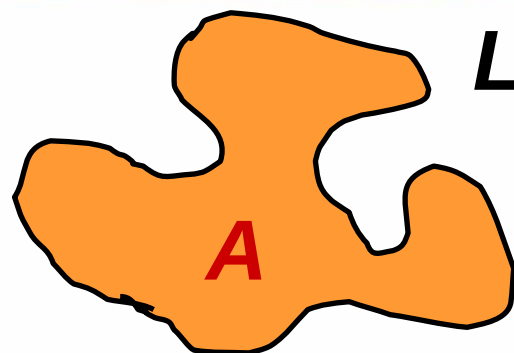


等ホロノミー問題

- ➡ Wilczek-Zeeホロノミーの最適化: 所望のユニタリゲートをホロノミーとして生成する最短経路を求めたい.
- ➡ 等ホロノミー問題(isoholonomic problem) の名でMontgomeryが定式化(1991)
- ➡ 等質空間の場合について我々は厳密に解いた(2004)

等周問題(isoperimetric problem)

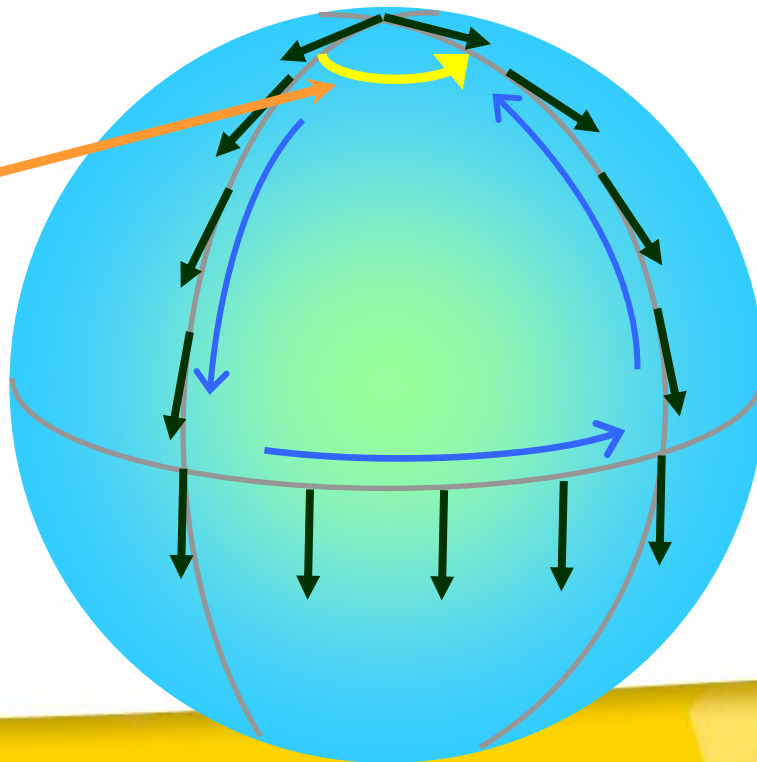
- ➡ 等ホロノミー問題は等周問題の一般化とも見なせる.
- ➡ 与えられた長さで最大の面積を囲む平面上の閉曲線を求めよ.
- ➡ 解は円



ホロノミー

⇒ 平行移動で作られる正味の回転

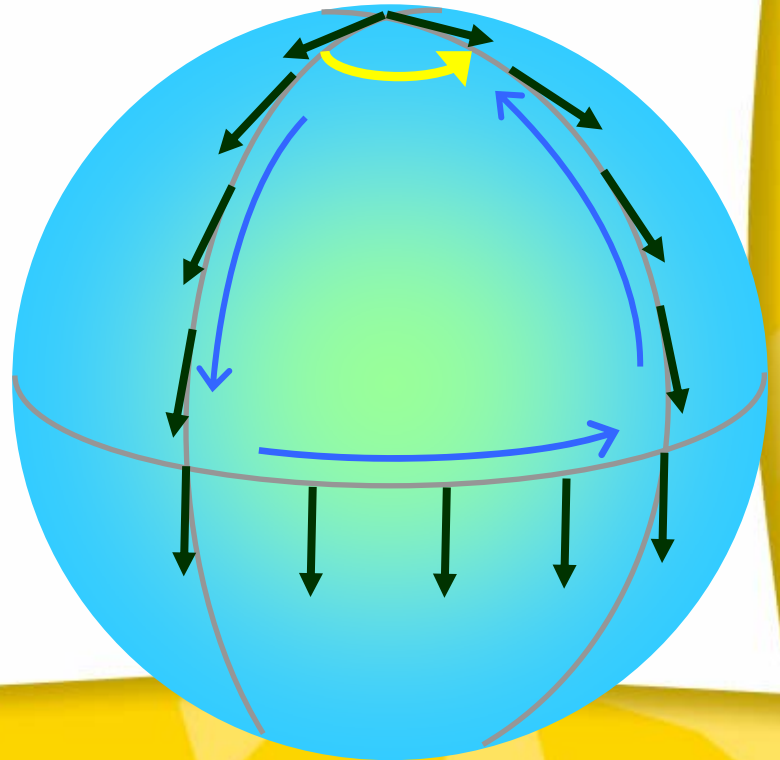
holonomy



等ホロノミーと等周問題の関係

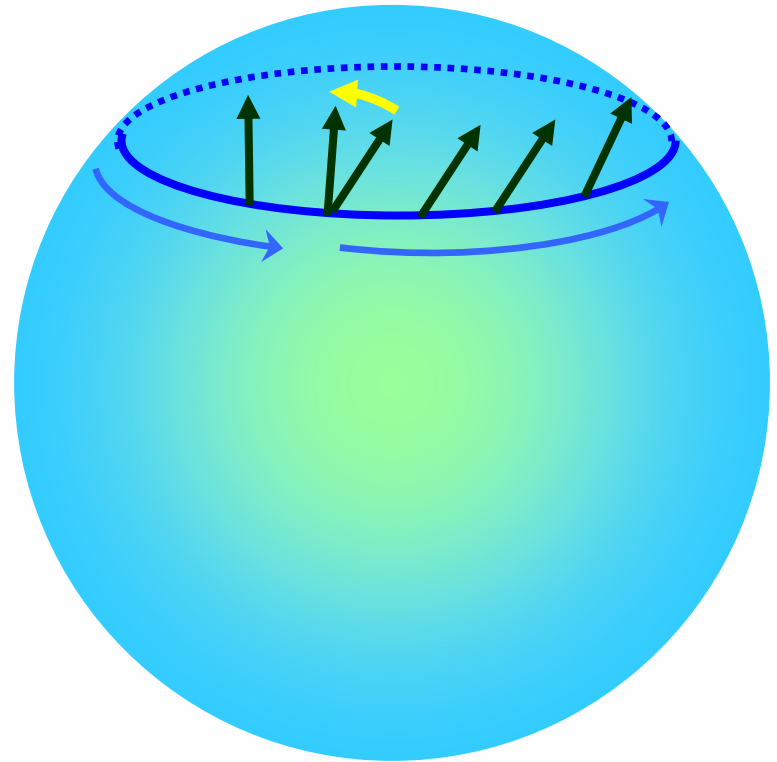
- ⇒ 球面は一定曲率
- ⇒ ホロノミーは立体角に等しい
- ⇒ 等ホロノミー問題は、与えられた面積を囲む最短の閉曲線を求めよ、という問題に帰着
- ⇒ 等周問題の双対

$$4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$$



球面上の等ホロノミー問題の解

⇒ 小円(small circle)





さて、一般の等ホロノミー問題は？

⇒ TeXプレゼンに移る.



人工デコヒーレンスの紹介

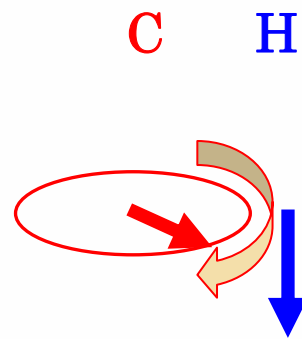
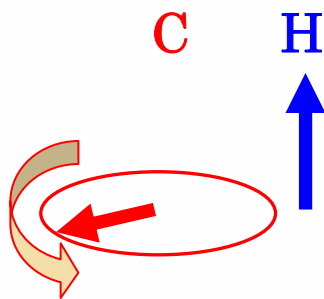
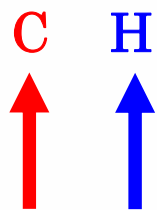
- ➡ デコヒーレンス：環境系との接触・エンタングルメントと環境情報の忘却

$$\rho_S \rightarrow \rho_S \otimes \rho_E \rightarrow \text{Tr}_E \left(U_{S+E} \rho_S \otimes \rho_E U_{S+E}^* \right) = \rho'_S$$

- ➡ 系Sに系Eを接触させて、系Eの状態をランダムに振って、系Sにデコヒーレンス様の状態変化を誘導する、という実験(近藤).

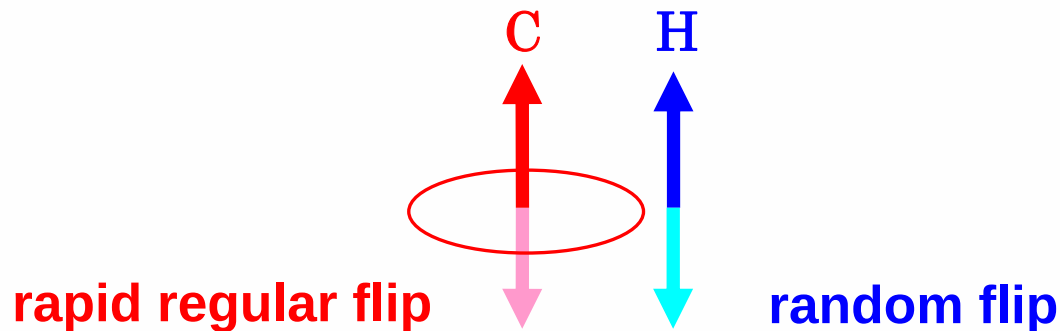
NMRデコヒーレンス実験

同一分子内のCのスピンをsystem,
Hのスピンをenvironmentと見なす.
Hスピンをランダム・パルス列で振って,
Cスピンのデコヒーレンスを誘導する.

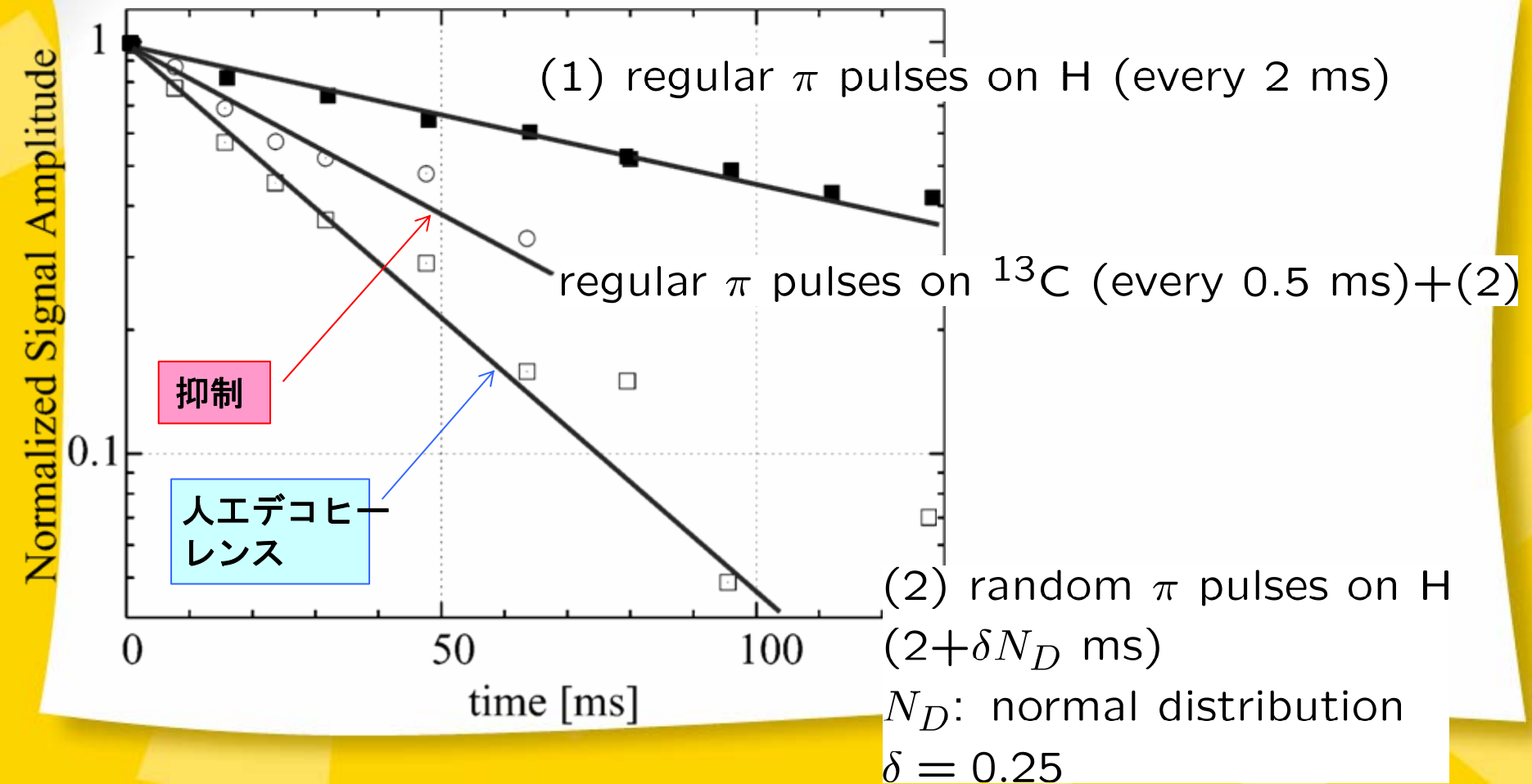


デコヒーレンス抑制

H(environment)のランダムな運動の時間スケールよりももっと短い周期的パルス列でC(system)スピンを振ると、デコヒーレンスが抑制される(bang-bang control).



実験結果





まとめ

- ➡ 制御と計算って何だろう？という問題提起
- ➡ ホロノミック量子計算の最適制御問題を、等質空間ファイバー束上の変分問題として定式化し、解いた.
- ➡ デコヒーレンスの誘起と抑制のNMR実験の紹介(昨秋の学会では2ビット系, 今年春には3ビット系について報告する予定)

Formulation of the isohomonomic problem

N 次元ヒルベルト空間 $\mathbb{C}^N$, k 重に縮退した準位を持つ系を考える .

Homogeneous bundle (integers $N > k > 0$)

$$\begin{array}{ccc} U(N) & \curvearrowright & S_{N,k}(\mathbb{C}) = U(N)/U(N-k) & \curvearrowright & U(k) \\ & \pi \downarrow & & & \\ U(N) & \curvearrowright & G_{N,k}(\mathbb{C}) = U(N)/U(k) \times U(N-k) \end{array}$$

Stiefel manifold

$$S_{N,k}(\mathbb{C}) = \{V : N \times k \text{ 行列}, V^\dagger V = I_k\}$$

Grassmann manifold

$$G_{N,k}(\mathbb{C}) = \{P : N \times N \text{ 行列}, P^2 = P, P^\dagger = P, \text{tr } P = k\}$$

projection map

$$\pi : S_{N,k}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{N,k}(\mathbb{C}), \quad V \mapsto \pi(V) := VV^\dagger$$

group actions (free and transitive) この群作用に関して $S_{N,k}$, $G_{N,k}$ は等質空間 .

$$\begin{array}{ll} U(N) \times S_{N,k} \rightarrow S_{N,k}, & (g, V) \mapsto gV \\ U(N) \times G_{N,k} \rightarrow G_{N,k}, & (g, P) \mapsto gPg^\dagger \end{array}$$

gauge transformation $(\pi(Vh) = \pi(V), \pi(gV) = g\pi(V)g^\dagger)$

$$S_{N,k} \times U(k) \rightarrow S_{N,k}, \quad (V, h) \mapsto Vh$$

Homogeneous bundle (integers $N > k > 0$)

$$\begin{array}{ccc} U(N) & \curvearrowright & S_{N,k}(\mathbb{C}) = U(N)/U(N-k) & \curvearrowright & U(k) \\ & \pi \downarrow & & & \\ U(N) & \curvearrowright & G_{N,k}(\mathbb{C}) = U(N)/U(k) \times U(N-k) & & \end{array}$$

以上で , $\pi : S_{N,k} \rightarrow G_{N,k}$ は $U(k)$ を構造群とする主ファイバー束であり , その構造は $U(N)$ の作用と両立 .

接続 (ゲージ場, connection): $U(k)$ のリー代数に値を持つ $S_{N,k}$ 上の微分形式

$$A := V^\dagger dV$$

(参照 : Maurer-Cartan 1-form $g^{-1}dg$)

曲線 $V(t)$ が水平 (horizontal) であるとは

$$A(\dot{V}(t)) = V^\dagger \frac{dV}{dt} = 0.$$

$S_{N,k}$, $G_{N,k}$ 上のリーマン計量

$$\mathrm{tr} \, (dV^\dagger \otimes dV), \qquad \frac{1}{2} \mathrm{tr} \, (dP \otimes dP).$$

$S_{N,k}$ の点が縮退エネルギー準位に属する固有空間 , $G_{N,k}$ の点が制御パラメータ , ゲージ場 A のホロノミー (Wilson loop) が Wilczek-Zee ホロノミー .

等ホロノミー問題：

$S_{N,k}(\mathbb{C})$ 上の与えられた始点と終点を結ぶ水平曲線で最短なものを見つけよ．

Isohomonomic problem (Montgomery 1991):

For given two points $V_0, V_1 \in S_{N,k}(\mathbb{C})$, find a horizontal curve $V(t)$ in $S_{N,k}(\mathbb{C})$ that connects V_0 and V_1 and that has the shortest length.

変分問題として定式化

水平最短曲線を求める問題は， $S_{N,k}$ 上の曲線 $V(t)$ に対する汎関数

$$S[V, \lambda] = \int_0^T \left\{ \text{tr} \left(\frac{dV^\dagger}{dt} \frac{dV}{dt} \right) - \text{tr} \left(\lambda V^\dagger \frac{dV}{dt} \right) \right\} dt \quad (1)$$

の最小値を与える曲線を求める問題．ここで $\lambda(t) \in \mathfrak{u}(k)$ は水平条件を課すラグランジュ未定乗数．曲線 $V(t)$ が水平ならば， S の値は射影された曲線 $P(t) = \pi(V(t))$ の2乗長さ

$$S = \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{dP}{dt} \frac{dP}{dt} \right) dt \quad (2)$$

に等しい．等ホロノミー問題は，端点を固定された曲線の族のうち汎関数(1)の停留値とくに最小値を与える曲線を求めよ，という問題．

変分方程式

汎関数 (1) の停留条件から変分方程式 (Euler-Lagrange 方程式) を導くと

$$\frac{d}{dt}(\dot{V}V^\dagger - V\dot{V}^\dagger + V\lambda V^\dagger) = 0 \quad (3)$$

$$V^\dagger \frac{dV}{dt} = 0 \quad (4)$$

変分方程式の解： 解くべき問題は連立方程式 (3), (4) の境界条件問題．この方程式系は可積分である．まず (3) を 1 回積分して

$$\dot{V}V^\dagger - V\dot{V}^\dagger + V\lambda V^\dagger = \text{const} = X \in \mathfrak{u}(N). \quad (5)$$

水平条件式 (4) のエルミート共役をとると

$$\dot{V}^\dagger V = 0.$$

式 (5) の右から V をかけて $V^\dagger V = I_k$ を用いると

$$\dot{V} + V\lambda = XV. \quad (6)$$

この式の左から $V^\dagger$ をかけて (4) を用いれば

$$\lambda = V^\dagger XV. \quad (7)$$

式(6)を用いて $\lambda(t)$ の t 微分を評価すると

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= V^\dagger X \dot{V} + \dot{V}^\dagger X V \\ &= V^\dagger X (XV - V\lambda) + (-V^\dagger X + \lambda V^\dagger) X V \\ &= V^\dagger X X V - V^\dagger X V \lambda - V^\dagger X X V + \lambda V^\dagger X V = -\lambda\lambda + \lambda\lambda = 0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lambda(t) = V^\dagger X V = \text{const} = \Omega \in \mathfrak{u}(k) \quad (8)$$

と積分できる．方程式(6)は $\dot{V} = XV - V\Omega$ となり， X と Ω が定数であることから

$$V(t) = e^{tX} V_0 e^{-t\Omega} \quad (9)$$

と積分できる．また，(8)は初期値 V_0 を用いて

$$\lambda(t) = \Omega = V_0^\dagger X V_0 \quad (10)$$

と書ける．これで積分は終わり．以下に見るように，定数行列 X にはある代数的条件式が課せられる．式(6)を代入した(5)は

$$(XV - V\Omega)V^\dagger - V(-V^\dagger X + \Omega V^\dagger) + V\Omega V^\dagger = X$$

となり， X に対する代数方程式

$$X - (VV^\dagger X + XVV^\dagger - VV^\dagger XVV^\dagger) = 0 \quad (11)$$

を導く．さらに具体的に書くために始点として

$$V_0 = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} \in S_{N,k}(\mathbb{C}) \quad (12)$$

をとる．群 $U(N)$ の推移的作用に関する対称性があるので，始点をここにとることができる． N 次の歪エルミート行列である X を次のようにパラメータづける：

$$X = \begin{pmatrix} \Omega & W \\ -W^\dagger & Z \end{pmatrix}. \quad (13)$$

ここで $W \in M(k, N - k; \mathbb{C})$, $Z \in \mathfrak{u}(N - k)$. すると条件式 (11) は

$$Z = 0 \quad (14)$$

と同値である．こうして変分方程式 (3), (4) の解は，定数行列 $\Omega \in \mathfrak{u}(k)$ と $W \in M(k, N - k; \mathbb{C})$ によって

$$V(t) = e^{tX} V_0 e^{-t\Omega}, \quad \lambda(t) = \Omega, \quad X = \begin{pmatrix} \Omega & W \\ -W^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

と与えられることがわかった．行列 X を制御行列と呼ぶ．

終端値問題

1) 閉ループ条件： $S_{N,k}$ 上の水平停留曲線 $V(t)$ を $G_{N,k}$ 上に射影した曲線 $P(t) = \pi(V(t))$ は閉ループになっていなければならない． $P(T) = P(0)$ ，すなわち

$$e^{TX} V_0 V_0^\dagger e^{-TX} = V_0 V_0^\dagger \quad (16)$$

を満たしていれば，終点 $V(T)$ は $V(T) = V(0) \cdot \Gamma$ によってホロノミー $\Gamma \in U(k)$ を定める．ホロノミーは

$$\Gamma = V^\dagger(0)V(T) = V_0^\dagger e^{TX} V_0 e^{-T\Omega} \quad (17)$$

となる．ホロノミック量子コンピュータは，このホロノミー Γ を所望のユニタリゲートとして用いるので，

2) 「ホロノミー＝ユニタリゲート」条件：

指定されたユニタリ行列 $U_{\text{gate}} \in U(k)$ に対して $\Gamma = U_{\text{gate}}$ となるべし．

以上を満たす制御行列 X を求めよという問題が残る．つまり (16), (17) が X について解くべき方程式になる．また，もし解曲線が複数個あるなら，その長さ $S = \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{dP}{dt} \frac{dP}{dt} \right) dt = \text{tr}(W^\dagger W) T$ が最小となるものを選びという問題が最終的に残る．それも含めて全部解けた．以下，方針のみを示す．

ホロノミーの埋め込み

Berry phase の場合， S^2 上の $U(1)$ 等ホロノミー問題の解は，所望のホロノミー角の2倍の立体角を囲む小円である．

Berry phase の舞台設定：

$$\begin{array}{c} S_{2,1}(\mathbb{C}) \cong U(2)/U(1) \cong SU(2) \cong S^3 \quad \hookleftarrow \quad U(1) \cong S^1 \\ \pi \downarrow \\ \mathbb{C}P^1 = U(2)/U(1) \times U(1) \cong S^2 \end{array}$$

$U(k)$ ホロノミーの問題も，対角化して $U(1)$ の問題に分解し，バラした解を $U(k)$ の中に埋め戻すことによって解かれる．

目標とする U_{gate} を対角化する：

$$R^\dagger U_{\text{gate}} R = U_{\text{diag}} = \text{diag}(e^{i\gamma_1}, \dots, e^{i\gamma_k}). \quad (18)$$

ここで $R \in U(k)$ ．各固有値 $e^{i\gamma_j} \in U(1)$ ．この意味で埋め込み

$$U(1)^k = U(1) \times \cdots \times U(1) \quad \hookrightarrow \quad U(k)$$

が定義される．

また , $N = 2k$ として

$$U(2)^k = U(2) \times \cdots \times U(2) \hookrightarrow U(2k), \quad (h_1, \cdots, h_k) \mapsto \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & h_k \end{pmatrix}$$

を用いてファイバー束の埋め込みを誘導 :

$$\begin{array}{ccc} U(1)^k & \hookrightarrow & U(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U(2)^k / U(1)^k & \hookrightarrow & U(2k) / U(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S^2)^k \hookrightarrow U(2)^k / U(1)^k \times U(1)^k & \hookrightarrow & U(2k) / U(k) \times U(k) \end{array}$$

この写像で S^2 上の立体角 $2\gamma_j$ ($j = 1, \cdots, k$) を囲む k 個の小円を Grassmann $U(2k) / U(k) \times U(k)$ に埋め込む .

それがホロノミー条件を満たす閉ループ .