行列正則化の一般化

筑波大学素粒子論研究室　菅野聡

足立宏幸さん(筑波大)、伊敷吾郎さん(筑波大)、松本高興さん(DIAS)との共同研究
hep/th 2103.09967v1

目次

イントロ

多体系を記述する際において場の理論は重要である

しかし

場の理論は無限の自由度を持ち、計算において発散がつきまとう

発散を有限に置き換える処方が必要になる

正則化

- 次元正則化
- Pauli-Villars正則化
- 格子正則化
- 行列正則化

行列正則化の応用

素粒子論

弦理論の非摂動的定式化を記述すると予想される行列模型において用いられている

重力の行列正則化

非可換空間上の重力理論

量子重力理論？

物性理論

Berezin-Toeplitz量子化はLLL(Lowest Landau Level)上での理論を考えることになる。

宇宙論

行列正則化を用いて非可換空間の効果を入れるとダークマターとの関連が示唆される曲率と物質の結合が見られる

行列正則化

- 空間M上の関数から$N\times N$行列への線形写像T_Nが次を満たすとき行列正則化という

$$(1).\ \lim_{N\to\infty}|T_N(f)T_N(g)-T_N(fg)|=0$$
$$(2).\ \lim_{N\to\infty}|iN[T_N(f),T_N(g)]-T_N(\{f,g\})|=0$$
$$(3).\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(f)=\frac{1}{2\pi}\int_M\omega f$$

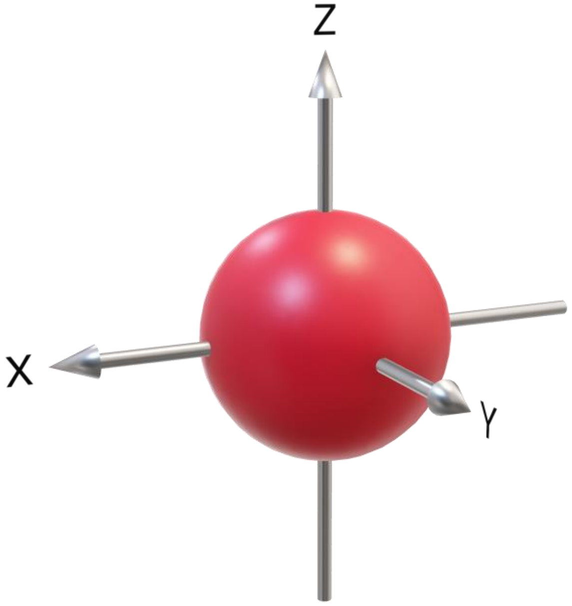
無限自由度の関数をいい性質を保ちながら
有限自由度の行列に近似している

行列正則化の特徴

2次元球面上のスカラー場を考える。

スカラー場にカットオフを入れる正則化と行列正則化を比べる

⇒行列正則化の特徴を見る。



球面調和関数$Y_{Jm}(\theta,\phi)$を用いてこのスカラー場は次のように書ける

$$\varphi(\theta,\phi)=\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{m=-J}^{J}\varphi_{Jm}Y_{Jm}(\theta,\phi)$$

ここで

$$Y_{Jm}(\theta,\,\phi)=\frac{(-1)^J}{2^J J!}\sqrt{\frac{(2J+1)(J+m)!}{J-m}}\frac{x_1+ix_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}}\frac{\partial^{J-m}}{\partial x_3^{J-m}}\left(x_1^2+x_2^2\right)^J$$

$$=\sum_{l=0}^{J}\sum_{i_k}c^{Jm}_{i_1i_2\cdots i_l}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_l}$$

$$\begin{cases}x_1=\sin\theta\cos\phi\\x_2=\sin\theta\sin\phi\\x_3=\cos\theta\end{cases}$$

カットオフを導入する正則化を考える

$$J=0,1,2,\cdots,\infty$$

$$\Downarrow$$

$$J=0,1,2,\cdots,\Lambda$$

つまり

$$\varphi(\theta,\phi)=\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{m=-J}^{J}\varphi_{Jm}Y_{Jm}(\theta,\phi) \Rightarrow \varphi(\theta,\phi)=\sum_{J=0}^{\Lambda}\sum_{m=-J}^{J}\varphi_{Jm}Y_{Jm}(\theta,\phi)$$

このような正則化において$\varphi_1(\theta,\phi)\varphi_2(\theta,\phi)$の場同士の積を考えると

$$[\Lambda]\otimes[\Lambda]=[0]\oplus[1]\oplus\cdots\oplus[2\Lambda]$$

となりカットオフを超えた分が出てしまい積について閉じていない

対称性を破る原因になる

一方で行列正則化は

$$x_i \Rightarrow \hat{x}_i = \frac{2}{\sqrt{N^2-1}} \hat{L}_i$$

L_iは$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$を満たす$N \times N$行列

を対応させることである。

$$\sum \hat{x}_i \hat{x}_i = \frac{4}{N^2-1} \sum \hat{L}_i \hat{L}_i = 1_{\mathrm{N}}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \frac{2i\epsilon_{ijk}}{\sqrt{N^2-1}} \hat{x}_k$$

これらの性質から$\hat{x}_i$が非可換な球面になっている

関数の写像は

$$Y_{Jm} = \sum_{l=0}^{J} \sum_{i_k} c^{Jm}_{i_1 i_2 \cdots i_l} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l} \Rightarrow \hat{Y}_{Jm} = \sum_{l=0}^{J} \sum_{i_k} c^{Jm}_{i_1 i_2 \cdots i_l} \hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \cdots \hat{x}_{i_l}$$

ここで次のことに注意する

$\hat{Y}_{Jm}$は$J = 0,1,\cdots,N-1$で書ける

$$\to \sum_{J=0}^{N-1} \sum_{m=-J}^{J} = \sum_{J=0}^{N-1} (2J+1) = N^2$$

ここから正則化した場は

$$\hat{\varphi} = \sum_{J=0}^{N-1} \sum_{m=-J}^{J} \varphi_{Jm} \hat{Y}_{Jm}$$

と書ける。

このような正則化において$\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2$は$N \times N$行列のままであって積について閉じている

行列正則化は代数がちゃんと閉じている

Berezin-Toeplitz量子化

設定

- 2次元の閉じた空間で計量が$g_{\alpha\beta}$となるMを考える。
この空間の体積を1に規格化し、volume formを ω と書く。

$$\frac{1}{2\pi}\int_M \omega \ = 1$$

- この空間にU(1)ゲージ場を入れる。
このときゲージ場は次を満たすものをとる。

$$F \equiv dA = \omega$$

ここから次を満たす(第一チャーン数)

$$\frac{1}{2\pi}\int_M F = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega \ = 1$$

設定の続き

- この空間にU(1)電荷がNになるスピノルをのせる。

スピノルの内積は次で定義する。

$$(\psi,\psi') = \int_M \omega \psi^\dagger \cdot \psi'$$

スピノルに作用するディラック演算子を考えられる

$$D\psi = i\gamma^\alpha(\partial_\alpha + \Omega_\alpha - iNA_\alpha)\psi$$

このときΩ_αはspin connectionであり、曲がった空間にスピノルを入れたために現れるもの。

$\{\gamma^\alpha\}_{\alpha=1,2}$ はガンマ行列であり、次の関係を満たす

$$\{\gamma^\alpha,\gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}$$

構成の準備

Landau Hall problemのLLLを
考えていることと同じ

- ディラック演算子のゼロ固有値の固有モード$\{\psi_I\}$を集める

$$D\psi_I = i\gamma^\alpha(\partial_\alpha + \Omega_\alpha - iNA_\alpha)\psi_I = 0$$

このゼロ固有モードは指数定理と消滅定理からNコあることが示せる。（十分にNが大きいとき）

- M上の関数はスピノルの空間の間の線形写像と考えられる。

$$f : \psi(x) \longmapsto f(x)\psi(x)$$

f: (U(1)電荷Nを持つスピノルの空間) ⟶ (U(1)電荷Nを持つスピノルの空間)

構成法

M上の関数fに対して$N \times N$行列$T_N(f)$を次のように対応させる。

$$T_N(f) = \Pi f \Pi$$

このときΠは次のような射影である

$$\Pi: \left(\begin{array}{l}\text{U(1)電荷Nを持つ}\\ \text{スピノルの空間}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{ディラック演算子}D\text{の}\\ \text{ゼロモードの空間}\end{array}\right)$$

ここから

$$T_N(f): \left(\begin{array}{l}\text{ディラック演算子}D\\ \text{のゼロモードの空間}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{ディラック演算子}D\\ \text{のゼロモードの空間}\end{array}\right)$$

となり、$N \times N$行列であることがわかる。

また成分で書くと

$$(T_N(f))_{IJ} = \int_M \omega \psi_I^\dagger \cdot f \psi_J$$

この構成法により作った行列は行列正則化の性質を満たす

$$(1).\ \lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty} |iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f,g\})| = 0$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f$$

$$T_N(f) = \Pi f \Pi$$

$$(T_N(f))_{IJ} = \int_M \omega \psi_I^\dagger \cdot f \psi_J$$

積について

二つの関数f, gに対する行列正則化$T_N(f), T_N(g)$の積を

$$T_N(f)T_N(g) = T_N(f * g)$$

と書く。この$f * g$を$1/N$で漸近展開する

$$f * g = \sum_i \frac{1}{N^i} C_i(f, g)$$

このとき

$$C_i : (\text{関数}) \times (\text{関数}) \to (\text{関数})$$

である。このC_iを評価すると次の性質が示せる。

$$C_0(f, g) = fg$$
$$C_1(f, g) - C_1(g, f) = -i\{f, g\}$$

ここから

$$\lim_{N\to\infty}|T_N(f)T_N(g)-T_N(fg)| = \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=1}\frac{1}{N^i}T_N(C_i(f,g))\right| = 0$$

であり性質(1)を満たす

つぎに

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}|iN[T_N(f),T_N(g)]-T_N(\{f,g\})| \\
&= \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{k=0}\frac{i}{N^{k-1}}T_N\big(C_k(f,g)-C_k(g,f)\big)-T_N(\{f,g\})\right| \\
&= \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{k=2}\frac{i}{N^{k-1}}T_N\big(C_k(f,g)-C_k(g,f)\big)\right| = 0
\end{aligned}$$

であり性質(2)を満たす

トレースについて

次にトレースについて考える

$$\mathrm{Tr}T_N(f) = \sum_{I=1}^{N} (T_N(f))_{II}$$
$$= \int_M \omega \mathrm{tr}\left(\sum_I \psi_I \psi_I^\dagger\right) f$$

$$(T_N(f))_{IJ} = \int_M \omega \psi_I^\dagger \cdot f \psi_J$$

ここで$\sum \psi_I \psi_I^\dagger$を評価すると次のように漸近展開できる

$$\sum_I \psi_I \psi_I^\dagger = \frac{N}{2\pi}\left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) + O(N^0)$$

ここから

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr}T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f$$

であり性質(3)を満たす。

非可換空間上の場の理論との関係(少し適当)

適当にϕ^4理論を考えると作用は,後述する埋め込み関数X^Aを用いて次のように書き換えられる

$$S = \int_M \omega\left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4\right)$$

$$= \int_M \omega\left(-\frac{1}{2}\phi\partial_\alpha\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)$$

$$= \int_M \omega\left(-\frac{1}{2}\phi\left\{X^A,\{X^A,\phi\}\right\} - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4\right)$$

$$(\partial_\alpha X^A)(\partial_\beta X^A) = g_{\alpha\beta}$$

この理論を正則化すると

$$S = \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{2}T_N(\phi)\left[T_N(X^A),[T_N(X^A),T_N(\phi)]\right] - \frac{1}{2}m^2T_N(\phi)T_N(\phi) - \frac{1}{4}T_N(\phi)T_N(\phi)T_N(\phi)T_N(\phi)\right)$$

今まで議論したことを用いると

$$T_N(f)T_N(g) = T_N(f * g)$$

$$\mathrm{Tr}T_N(f) = \int_M \omega \mathrm{tr}\left(\sum_I \psi_I \psi_I^\dagger\right) f \equiv \int_M \rho f$$

この式は次のように書き換えられる

$$S = \int_M \rho\left(-\frac{1}{2}\phi * \left\{X^A, \{X^A, \phi\}_*\right\}_* - \frac{1}{2}m^2\phi * \phi - \frac{1}{4!}\lambda\phi * \phi * \phi * \phi\right)$$

これは積が非可換になっていて非可換空間上の場の理論になっている

ここで

$$\{f, g\}_* = f * g - g * f$$

非可換空間上の場の理論にしたときの補正である ρ に注目して考えると曲率と物質場との結合が現れる。

⇒ダークマターとの関連

[V.P.Nair hep/th 2008.11261v1][T. Harko and F.S.N. Lobo, Galaxies 2, 410（2014).]

行列正則化の一般化

今まで議論してきたBerezin-Toeplitz量子化を用いた行列正則化の一般化を考える。

今まで

電荷を持たないスカラー場f → 正方行列$T_N(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$

一般化

背景ゲージ場の電荷を持つスカラー場φ → 長方行列$T_{NM}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix}$

設定

- 2次元の閉じた空間で計量が$g_{\alpha\beta}$となるMを考える。
この空間の体積を1に規格化し、volume formを ω と書く。

$$\frac{1}{2\pi}\int_M \omega = 1$$

- この空間にU(1)ゲージ場Aと任意の背景ゲージ場$A^{(E)}$を入れる。
このときゲージ場は次を満たすものをとる。

$$F \equiv dA = \omega$$

ここから次を満たす(第一チャーン数)

$$\frac{1}{2\pi}\int_M F = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega = 1$$

設定の続き

- この空間にU(1)電荷がNで背景ゲージ場のゲージ群に対して表現Eになるスピノルをのせる。

スピノルの内積は次で定義する。

$$(\psi,\psi') = \int_M \omega\psi^\dagger \cdot \psi'$$

このとき、$\cdot$ には表現空間での内積も含まれるように拡張する

スピノルに作用するディラック演算子を考えられる

$$D^{(E)}\psi = i\gamma^\alpha\left(\partial_\alpha + \Omega_\alpha - iNA_\alpha - iA^{(E)}\right)\psi$$

このときΩ_αはspin connectionであり、曲がった空間にスピノルを入れたために現れるもの。

$\{\gamma^\alpha\}_{\alpha=1,2}$ はガンマ行列であり、次の関係を満たす

$$\{\gamma^\alpha,\gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}$$

構成の準備

- ディラック演算子のゼロ固有値の固有モード$\{\psi_I\}$を集める

$$D^{(E)}\psi_I = i\gamma^\alpha\left(\partial_\alpha + \Omega_\alpha - iNA_\alpha - iA^{(E)}\right)\psi_I = 0$$

このゼロ固有モードは指数定理と消滅定理から$\left(d^{(E)}N + c^{(E)}\right)$コあることが示せる。（十分にNが大きいとき）

ここを変える

- ~~M上の関数 … ピノルの空間の間の線形写 … 考えられ~~

~~$f: \ldots (x)\psi(x)$~~

~~f: U(… 電荷Nを持つ スピノルの空間 → U(1) 電 … を持つ スピノルの空間~~

今まで

これを正則化

U(1)電荷Nを持つ
スピノルの空間

関数f

U(1)電荷Nを持つ
スピノルの空間

一般化

U(1)電荷Nを持ち表現空間E
のスピノルの空間

EからE'への
線形写像φ

U(1)電荷Nを持ち表現空間E'
のスピノルの空間

これを正則化できる

- M上の関数はスピノルの空間の間の線形写像と考えられる。

$$f: \psi(x) \longmapsto f(x)\psi(x)$$

f: (U(1)電荷Nを持つスピノルの空間) → (U(1)電荷Nを持つスピノルの空間)

- 関数の代わりに次のような写像を考える

$$\varphi: \psi(x) \longmapsto \varphi(x)\psi(x)$$

φ: (U(1)電荷Nを持ち表現空間Eのスピノルの空間) → (U(1)電荷Nを持ち表現空間E'のスピノルの空間)

Ex.背景ゲージ場のゲージ群をU(n)として$E = E'$ =(基本表現)
　→ φはadjoint表現になる
Ex.背景ゲージ場のゲージ群をU(1)とすると$E = $ (自明表現)$, E' = $ (電荷Q)
　→ φは電荷Qを持つスカラー場

構成法

EからE'への写像φに対して$(d^{(E')}N+c^{(E')})\times(d^{(E)}N+c^{(E)})$行列$T_N^{(E',E)}(\varphi)$を次のように対応させる。

$$T_N^{(E',E)}(\varphi)=\Pi^{(E')}\varphi\Pi^{(E)}$$

このとき$\Pi^{(E)}$は次のような射影である

$$\Pi^{(E)}:\begin{pmatrix}\text{U(1)電荷}N\text{を持ち表現空間}E\\ \text{のスピノルの空間}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\text{ディラック演算子}D^{(E)}\\ \text{のゼロモードの空間}\end{pmatrix}$$

ここから

$$T_N^{(E',E)}(\varphi):\begin{pmatrix}\text{ディラック演算子}D^{(E)}\\ \text{のゼロモードの空間}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\text{ディラック演算子}D^{(E')}\\ \text{のゼロモードの空間}\end{pmatrix}$$

となり、$(d^{(E')}N+c^{(E')})\times(d^{(E)}N+c^{(E)})$行列であることがわかる。

また成分で書くと$\chi_{I'}\in\mathrm{Ker}D^{(E')},\psi_J\in\mathrm{Ker}D^{(E)}$

$$(T_N(f))_{I'J}=\int_M\omega\chi_{I'}^{\dagger}\cdot\varphi\psi_J$$

この構成法により作った行列は行列正則化の性質を満たす

$$(1).\ \lim_{N\to\infty}\left|T_N^{(E,E')}(\varphi)T_N^{(E',E'')}(\varphi')-T_N^{(E,E'')}(\varphi\varphi')\right|=0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty}\left|iN[T_N(f1),T_N(\varphi)]^{(E,E')}-T_N^{(E,E')}(\{f,\varphi\})\right|=0$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_M\omega\,\mathrm{tr}_E\varphi\qquad(\varphi\text{は}E\text{の間の写像})$$

$$[T_N(f1),T_N(\varphi)]^{(E,E')}\equiv T_N^{(E',E')}(f1_{E'})T_N^{(E',E)}(\varphi)-T_N^{(E',E)}(\varphi)T_N^{(E,E)}(f1_E)$$

$$\{f,\varphi\}=W^{\alpha\beta}(\partial_\alpha f)(\nabla_\beta\varphi)\qquad\left(\nabla_\beta\varphi=\partial_\beta\varphi-iA_\beta^{(E')}\varphi+i\varphi A_\beta^{(E)}\right)$$

正則化されたラプラシアン

- ラプラシアンを正則化するためにポアソン括弧でラプラシアンを書く必要がある
  → $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$空間への等長埋め込み関数$\{X^A\}_{A=1,2,\cdots,d}$ $(X: M \to \mathbb{R}^d)$を用いる。

$$\left(\partial_\alpha X^A\right)\left(\partial_\beta X^A\right) = g_{\alpha\beta}$$

この埋め込み関数によりラプラシアンは次のように書ける

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= -g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi \\ &= -\{X^A, \{X^A, \varphi\}\}\end{aligned}$$

とかけて、これを正則化することができ

$$\widehat{\Delta}T_N^{(E,E')}(\varphi) = \left[T_N\left(X^A 1\right), \left[T_N\left(X^A 1\right), T_N(\varphi)\right]^{(E,E')}\right]^{(E,E')}$$

と書ける。

例.トーラス

ここで$E=\left(\text{電荷}-Q\right)$であり$E'$は自明表現とする。

つまり、電荷Qの正則化

このときのラプラシアンの行列正則化は(Bは$N\times(N-Q)$行列)

$$\hat{\Delta}B=\frac{N^2}{4\pi^2}\left(U\circ U^\dagger\circ+V\circ V^\dagger\circ\right)B$$

$$U^{(N)}=e^{-\frac{\pi}{2N}}\begin{pmatrix} & & & 1\\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},V^{(N)}=e^{-\frac{\pi}{2N}}\begin{pmatrix} q^{-1} & & & \\ & q^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{-N}\end{pmatrix}\quad\left(q=e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)$$

$$A\circ B\equiv A^{(N)}B-BA^{(N-Q)}$$

と書けて、これの固有値問題はHofstadter problemと一致する。

まとめ

- 行列正則化：関数→行列の写像

  Berezin-Toeplitz量子化などを用いる

- 行列正則化の一般化として任意の背景ゲージ場と結合するスカラー場の正則化を行った

- 今後はテンソル場への拡張、高次元への拡張

重力理論の行列正則化⇒非可換空間の重力理論

⟶量子重力理論？

ご清聴ありがとうございました