相互作用がある場合の
エンタングルメントエントロピー

森　崇人
（総合研究大学院大学素粒子原子核専攻）

磯暁(総研大, KEK)、酒井勝太(KEK)との共同研究に基づく
arXiv: 2103.05303 [hep-th]

KEK 素核宇・物性 連携研究会（2021/3/29）

エンタングルメントエントロピー（EE）

量子情報　物性　ホログラフィー/BH　宇宙論

✓ 自由場や共形対称性のある系はよく理解されている

Q. 相互作用のある共形対称性のない(massive)理論では？

UV発散の処理　non-Gaussianity　EEの面積則は？

エンタングルメントエントロピー（EE）

量子情報　物性　ホログラフィー/BH　宇宙論

✓ 自由場や共形対称性のある系はよく理解されている

Q. 相互作用のある共形対称性のない(massive)理論では？

UV発散の処理　non-Gaussianity　EEの面積則は？

くりこみ　頂点からの寄与　all orderで成立

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

Outline

1. レプリカ法とorbifold method
2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論
3. 面積則の導出・解釈
4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与
5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

Outline

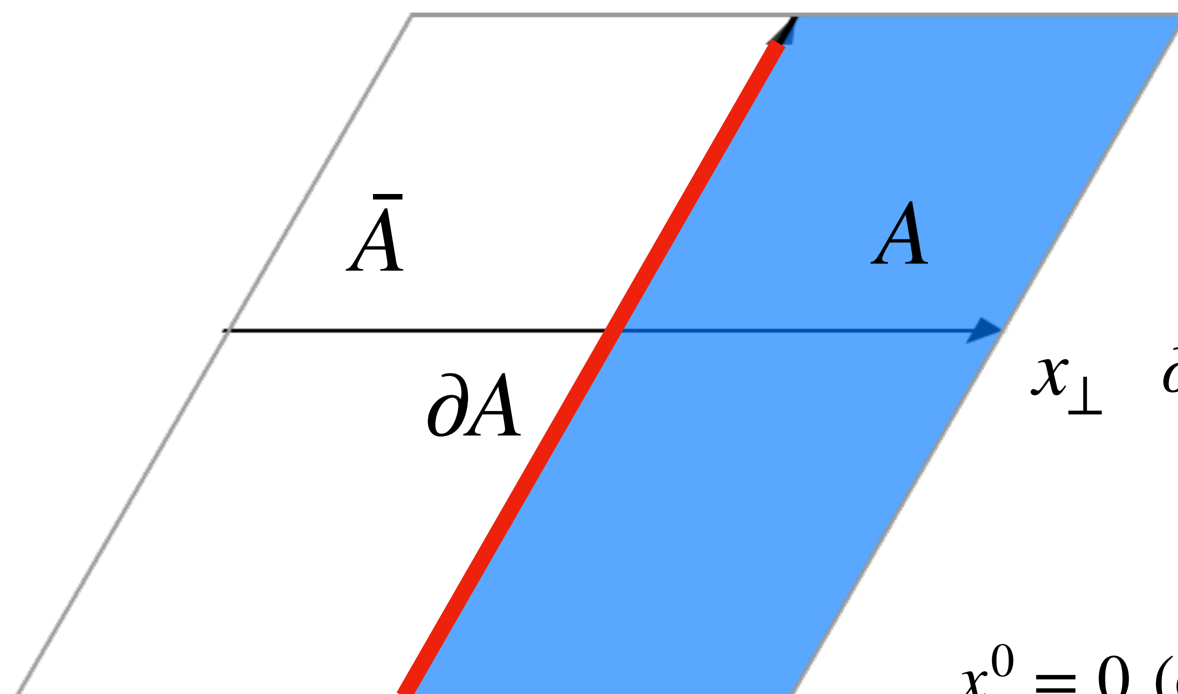
1. レプリカ法とorbifold method
2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論
3. 面積則の導出・解釈
4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与
5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

セットアップ

A：半空間、ρ：ϕ^4スカラー理論の真空

∂Aに沿った$(d-1)$次元方向

$\boldsymbol{x}_{\parallel}$



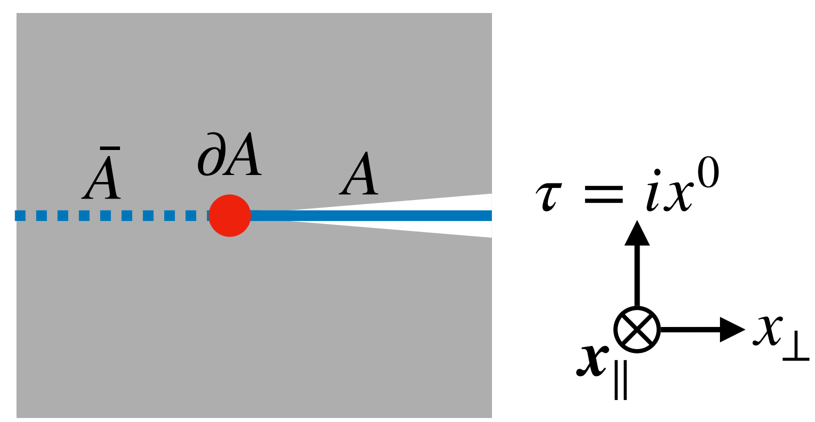
$x_{\perp}$　∂Aに垂直な方向

$x^0 = 0$ (constant time slice)

レプリカ法　[Casini-Huerta, 2009]

縮約密度行列のユークリッド経路積分表示は以下で与えられる：

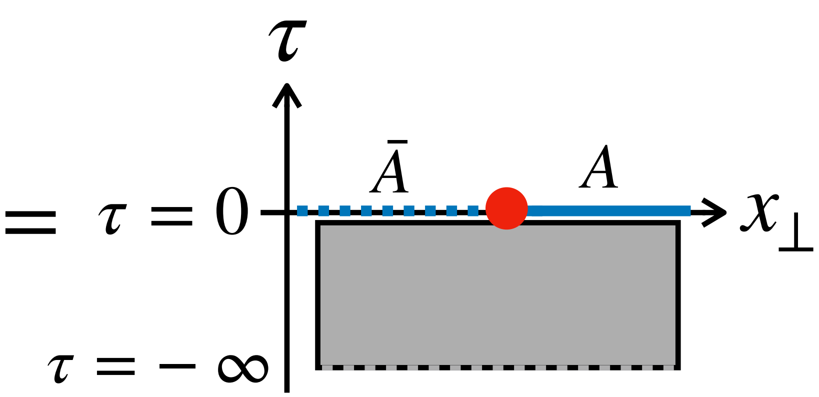
$$\rho_A = \mathrm{tr}_{\bar{A}} |\Psi(\tau = 0)\rangle\langle\Psi(\tau = 0)| =$$



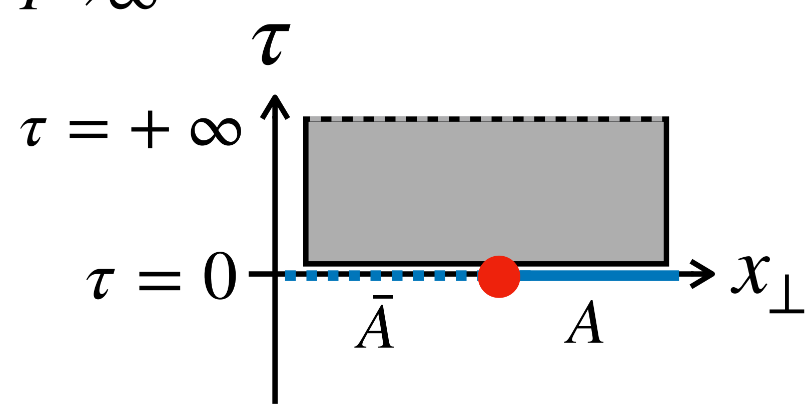
($\boldsymbol{x}_\perp$ (bold) denotes $(\tau, x_\perp)$ hereafter)

なぜなら

$$|\Psi(\tau = 0)\rangle_{A\bar{A}} = \lim_{T\to\infty} \left[e^{-TH} |\Psi(\tau = -T)\rangle_{A\bar{A}}\right] =$$



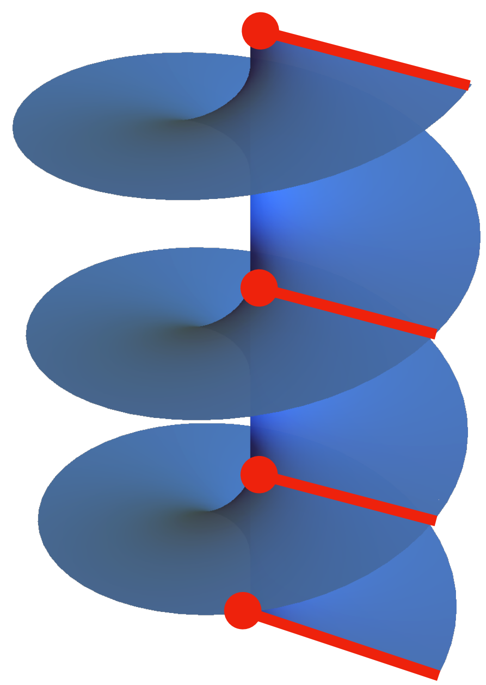
$$\langle\Psi(\tau = 0)|_{A\bar{A}} =$$



レプリカ法 [Casini-Huerta, 2009]

$$S_A = -\,\mathrm{tr}_A\left(\rho_A \log \rho_A\right) = -\lim_{n\to 1}\partial_n\left(\mathrm{tr}_A \rho_A^n\right)$$

$\mathrm{tr}_A \rho_A^n$: n-fold cover Σ_n上のEuclid経路積分

$\rho_A^n =$  $\times\,\mathbb{R}^{d-1} \quad (n=3)$

Σ_n は ∂A 周りの周期が $2\pi n$のコニカル特異点を持つ

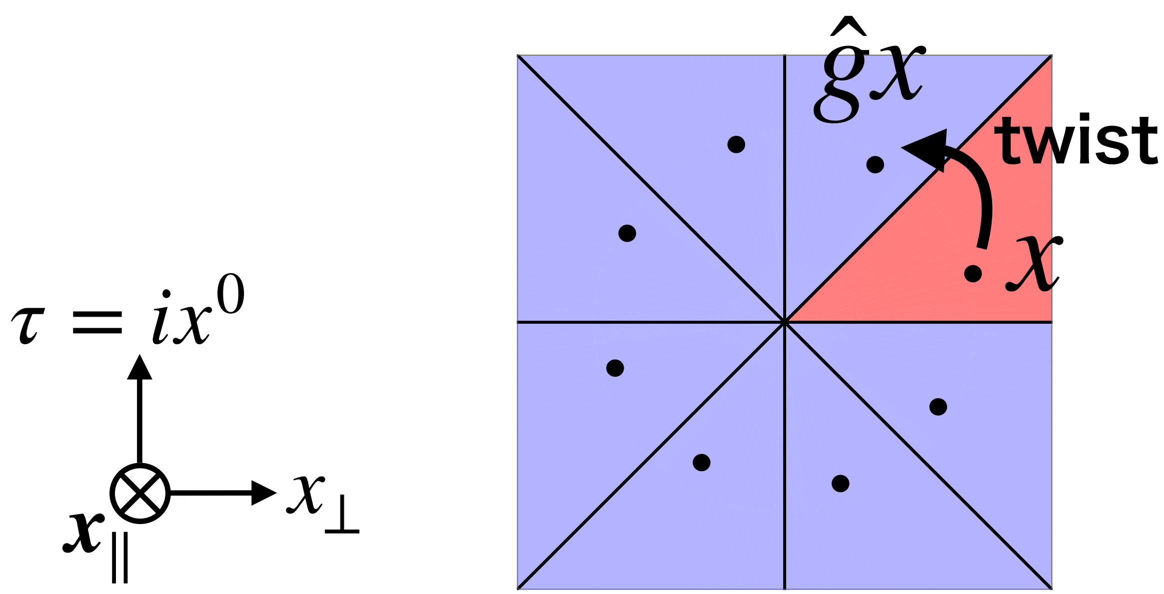
Orbifold method

[Nishioka-Takayanagi, 2007]
[He-Numasawa, et al., 2014]

n から $M = 1/n \in \mathbb{Z}$に解析接続する → $2\pi/M$回転で空間を同一視

$$S_A = -\frac{\partial}{\partial M}\left(MF^{(M)}\right)\Big|_{M\to 1}$$

$F^{(M)}$: $\mathbb{Z}_M$ orbifold $\Sigma^{(M)} \times \mathbb{R}^{d-1}$上の自由エネルギー



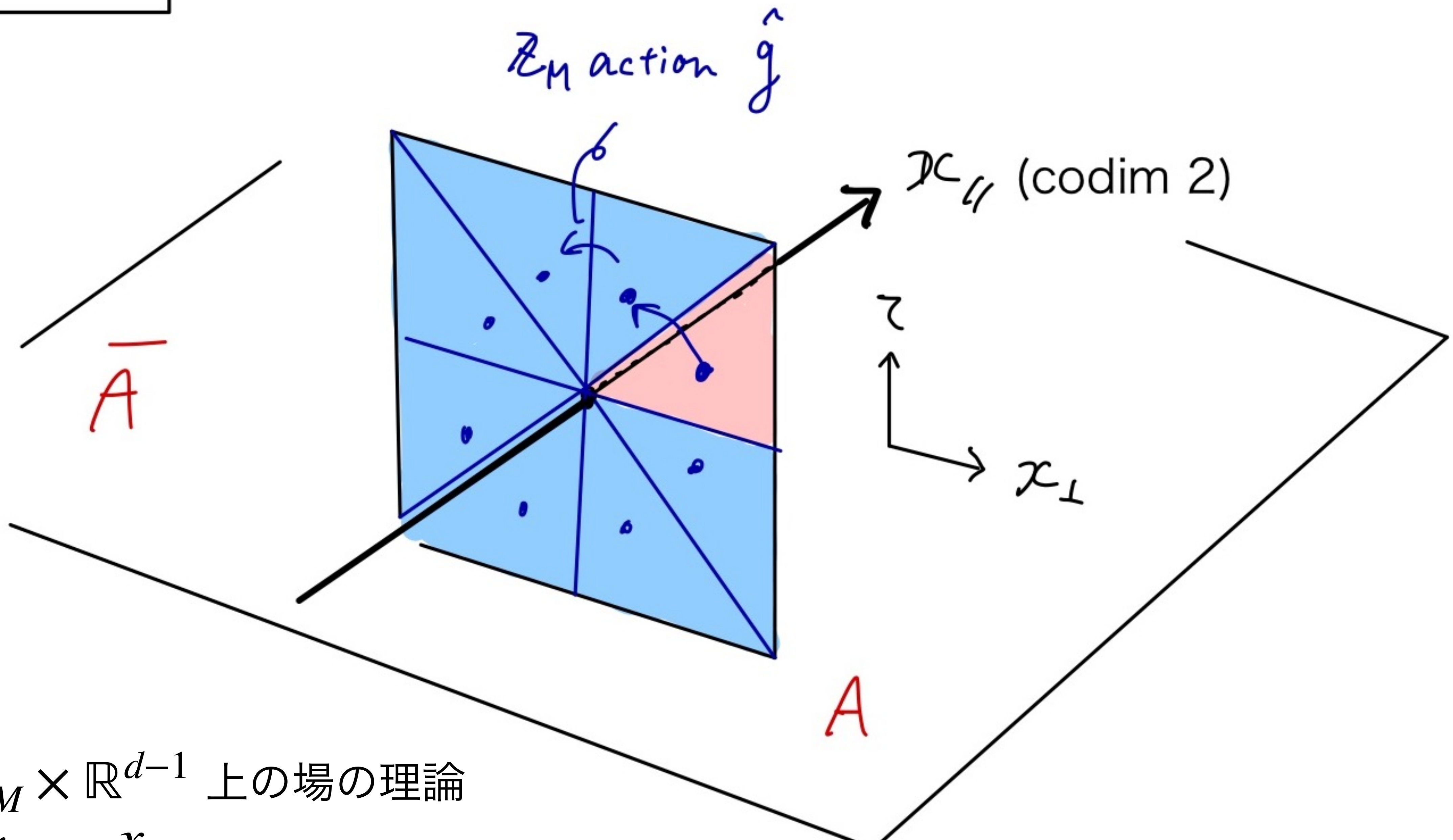
$(M = 8)$

射影演算子$\hat{P} \equiv \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\hat{g}^j$で空間の各点を同一視＝ツイスト$\{\hat{g}^j\}$を足し上げる

Orbifold method

[Nishioka-Takayanagi, 2007]
[He-Numasawa, et al., 2014]

(d+1) dim



$\mathbb{Z}_M \times \mathbb{R}^{d-1}$ 上の場の理論

$(\tau = x_1,$ $\quad x_{\parallel}$

$x_\perp = x_2)$

Outline

1. レプリカ法とorbifold method
2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論
3. 面積則の導出・解釈
4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与
5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

Outline

1. レプリカ法とorbifold method

2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

3. 面積則の導出・解釈

4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与

5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

$\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用するQFT

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

射影演算子$\hat{P} \equiv \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\hat{g}^j$で空間の各点を同一視＝ツイスト$\{\hat{g}^j\}$を足し上げる

- $\mathbb{Z}_M$ orbifold上のスカラー場のaction

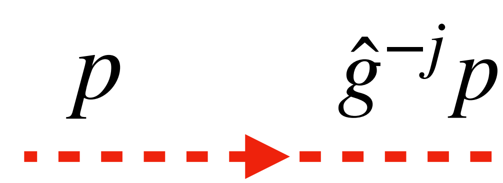
$$\int \frac{d^2x}{M} d^{d-1}x_\parallel \left[\frac{1}{2}\phi\hat{P}\left(-\Box + m^2\right)\hat{P}\phi + \frac{\lambda}{4}(\hat{P}\phi)^4\right]$$

- $\mathbb{Z}_M$ orbifold上のpropagator

$$G_0^{(M)}(x,y) = M\langle x\,|\,(\hat{P}G_0\hat{P})\,|\,y\rangle = \sum_{n=0}^{M-1} G_0(\hat{g}^n x, y) = \sum_{n=0}^{M-1}\int \frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}}\frac{e^{ip\cdot(\hat{g}^n x - y)}}{p^2+m^2}$$

- $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の頂点

$$\frac{1}{M}\lambda$$

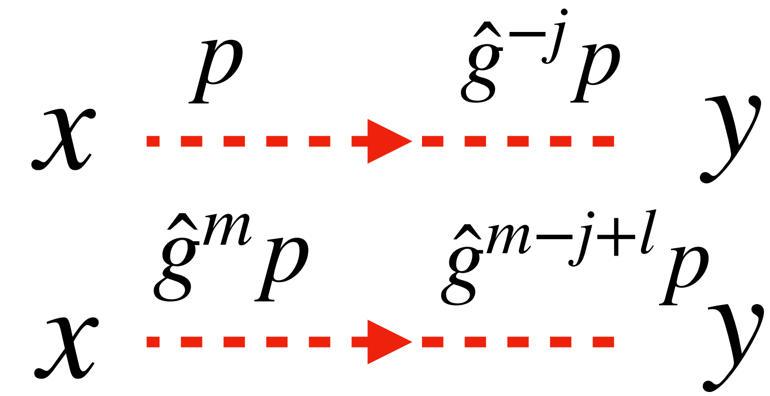


Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

- ツイスト$\{\hat{g}^{n_j}\}$=ゲージ変換

propagator ∈リンク



- 頂点の$\mathbb{Z}_M$回転＝ゲージ冗長性

$$\delta^2(\hat{g}^{m_1}\boldsymbol{p}_1 + \hat{g}^{m_2}\boldsymbol{p}_2 + \cdots) = \delta^2\left(\hat{g}^{n}\{\hat{g}^{m_1}\boldsymbol{p}_1 + \hat{g}^{m_2}\boldsymbol{p}_2 + \cdots\}\right)$$

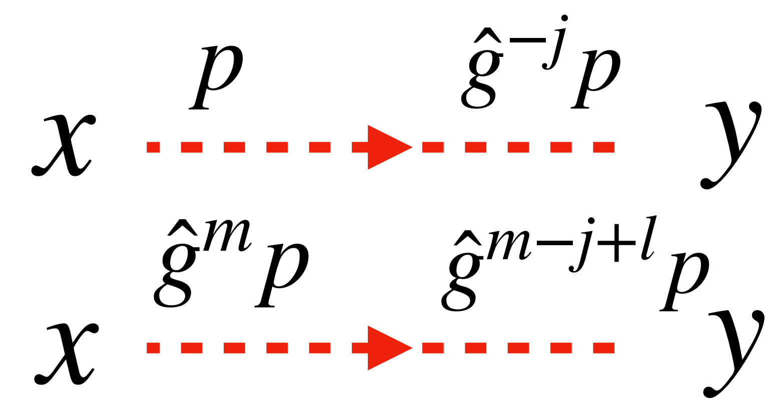
☹ propagatorはゲージ不変でない (e.g. $x \to \hat{g}^{-m}x, y \to \hat{g}^{-l}y$)

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

- ツイスト$\{\hat{g}^{n_j}\}$=ゲージ変換

propagator ∈リンク



- 頂点の$\mathbb{Z}_M$回転＝ゲージ冗長性

$$\delta^2(\hat{g}^{m_1}\boldsymbol{p}_1+\hat{g}^{m_2}\boldsymbol{p}_2+\cdots)=\delta^2\left(\hat{g}^{n}\{\hat{g}^{m_1}\boldsymbol{p}_1+\hat{g}^{m_2}\boldsymbol{p}_2+\cdots\}\right)$$

☹ propagatorはゲージ不変でない (e.g. $x\to\hat{g}^{-m}x, y\to\hat{g}^{-l}y$)

Q. ゲージ不変量は何か？

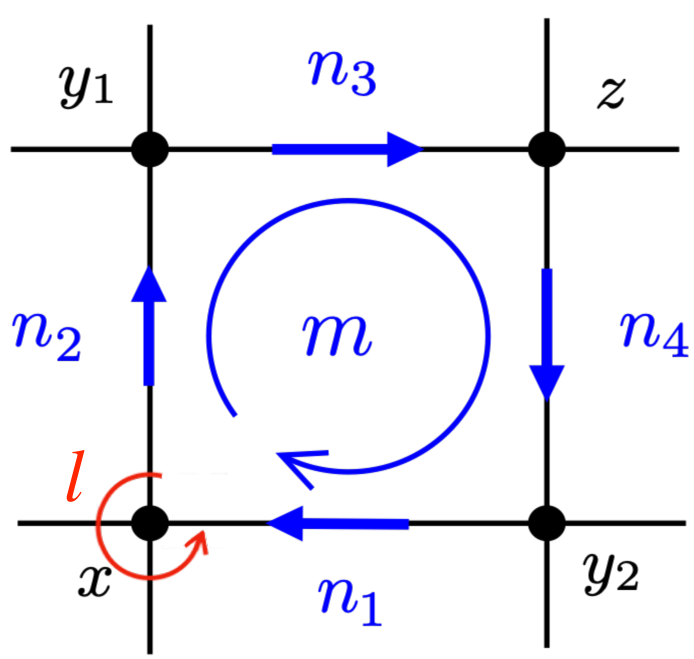
A. 格子ゲージ理論では、Wilson loop (flux)が不変量

➡plaquetteを成すpropagatorのツイストの和(“flux")が不変量

$\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用するQFT
＝Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

$$\frac{1}{M}\sum_{m,n=0}^{M-1} x \bullet \xrightarrow{\hat{g}^{-m}p} \xrightarrow{\hat{g}^{-n}p} \bullet\, y = \frac{1}{M}\sum_{m,n=0}^{M-1} x \bullet \xrightarrow{p} \xrightarrow{\hat{g}^{m-n}p} \bullet\, y \equiv \sum_{m-n=0}^{M-1} x \bullet \xrightarrow{m-n} \bullet\, y$$



flux mは頂点の$\mathbb{Z}_M$ツイストによらない

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

不変量：plaquette周りのツイストの和(flux)

$$m = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = (n_1 - l) + (n_2 + l) + n_3 + n_4$$

各頂点$1/M$

冗長なツイストの数 =(リンク数)-(ループ数)
=(頂点の数)-1

全体にかかるM因子：$\left(\frac{1}{M}\right)^{\#頂点} \times (M)^{\#頂点-1} = \frac{1}{M}$

Outline

1. レプリカ法とorbifold method

2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

3. 面積則の導出・解釈

4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与

5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

Outline

1. レプリカ法とorbifold method
2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論
3. 面積則の導出・解釈
4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与
5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

EE面積則の導出

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

EE: $S_A = -\frac{\partial}{\partial M}\left(MF^{(M)}\right)\Big|_{M\to 1}$

$F^{(M)} = \sum_{L=1}^{\infty}$ (L-loop 連結バブルB with twists)

$\mathrm{vol}(\partial A) = V_{d-1}$

$$B = \frac{1}{M}\sum_{j_1,\cdots,j_L=0}^{M-1}\int\prod_{l=1}^{L}\left[\frac{d^{d+1}\mathbf{p}_l}{(2\pi)^{d+1}}\right] I\left(\{\mathbf{p}_l, \hat{g}^{j_l}\mathbf{p}_l\}\right)\delta^{d+1}\left(\sum_{l=1}^{L}(1-\hat{g}^{j_l})\mathbf{p}_l\right)$$

$$= V_{d-1}\,\delta^2\left(\sum_{l=1}^{L}(1-\hat{g}^{j_l})\mathbf{p}_l\right)$$

どのダイアグラムでも同様　➡all orderで面積則が示された！

EE面積則の導出

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

- 直感的な理解 ―ピン留めされたpropagator―

single twistならtwisted propagator以外は並進不変

$$G_0(\hat{g}^n x - y) = e^{\cot\theta_n \boldsymbol{r}\times\partial_{\boldsymbol{X}}/2} \frac{1}{4\sin^2\theta_n} \int \frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} e^{ik_\parallel\cdot r_\parallel} \frac{1}{\left(-\partial_{\boldsymbol{X}}^2/4\sin^2\theta_n\right) + {k_\parallel}^2 + m^2} \delta^2(\boldsymbol{X})$$

但し、$r = x - y$、$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})/2$、$\theta_n = n\pi/M$

➡ $$G_0(\hat{g}^n x - y) \to \frac{1}{4\sin^2\theta_n} \delta^2(\boldsymbol{X}) \int \frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} G_0(k_\parallel)$$

部分系の境界に局在したmodeを与える

Outline

1. レプリカ法とorbifold method

2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

3. 面積則の導出・解釈

4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与

5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

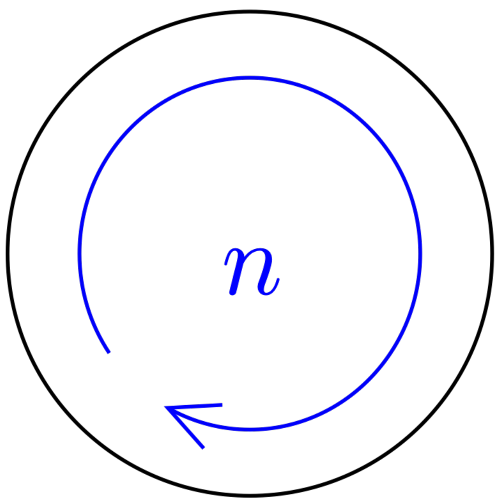
Outline

1. レプリカ法とorbifold method
2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論
3. 面積則の導出・解釈
4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与
5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

例：EEの1-loopの寄与　[Nishioka, Takayanagi ’07; He, Numasawa, et al. ’14]



この場合はpropagator一つのツイストに等価

一つのツイストの足しあげ：$(M-1)^1$ in $F^{(M)}$

$$\because \sum_{j=1}^{M-1} \delta^2\left((1-\hat{g}^j)\boldsymbol{k}\right) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{\left|1-\hat{g}^j\right|^2}\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right)}{4\sin^2\frac{j\pi}{M}} = \frac{M^2-1}{12}\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right)$$

➡ナイーブには2つ以上のツイスト足しあげ＝$O\left((M-1)^2\right)$

leadingの寄与は一つのツイストから来るはず

どういう寄与か？→higher loops

$$\Rightarrow S_{1-\text{loop}} = -\frac{V_{d-1}}{12}\int \frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} \log G_0^{-1}(k_\parallel)$$

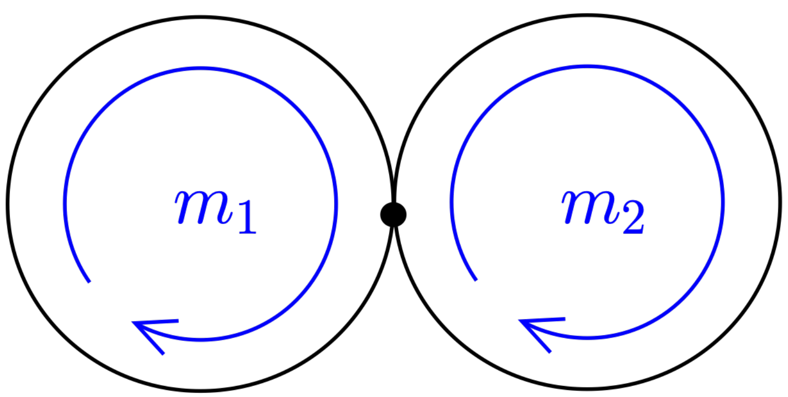
但し、$G_0^{-1}(k_\parallel) = k_\parallel^2 + m^2$

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

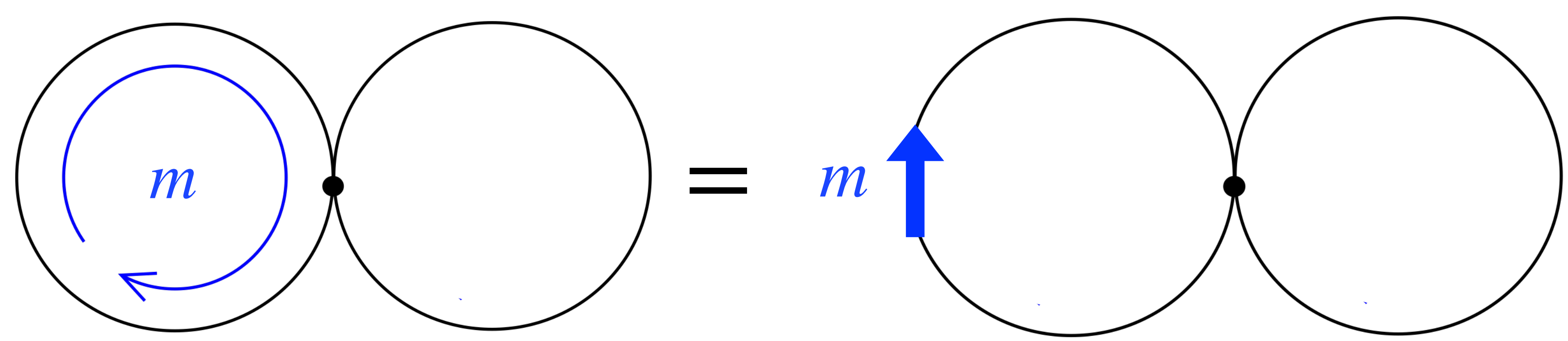
[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

2-loop以降（例：2-loop, 3-loop)

リンク=propagator, **vertex**



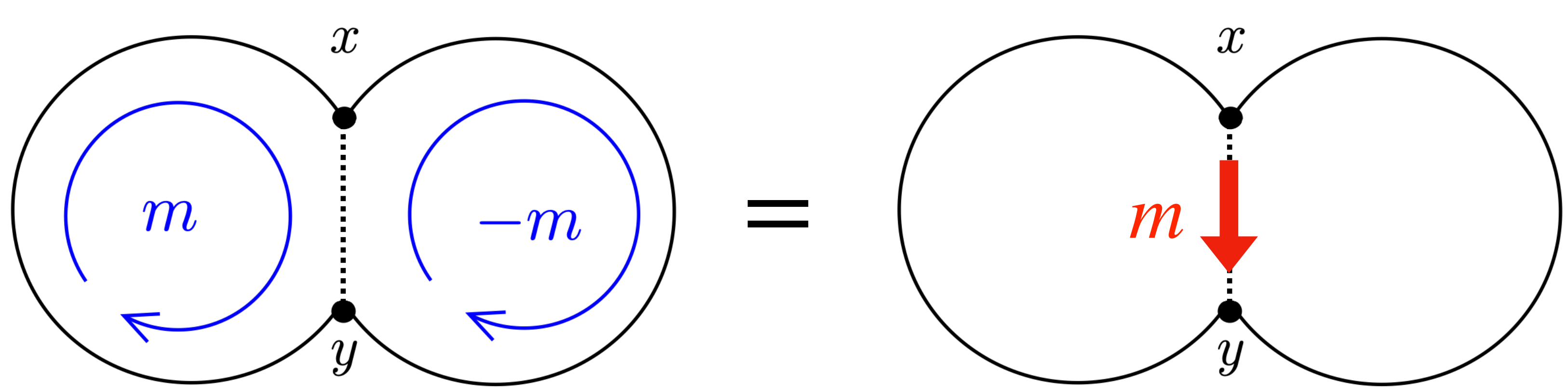
- $(m_1, m_2) = (m, 0)$ ➡single twist of propagator



- $(m_1, m_2) = (m, -m)$ ➡single twist of **vertex**

$$\int dx\phi(x)^4$$

$$\to \int dxdy\phi(x)^2\phi(y)^2\delta(\hat{g}^m x - y)$$

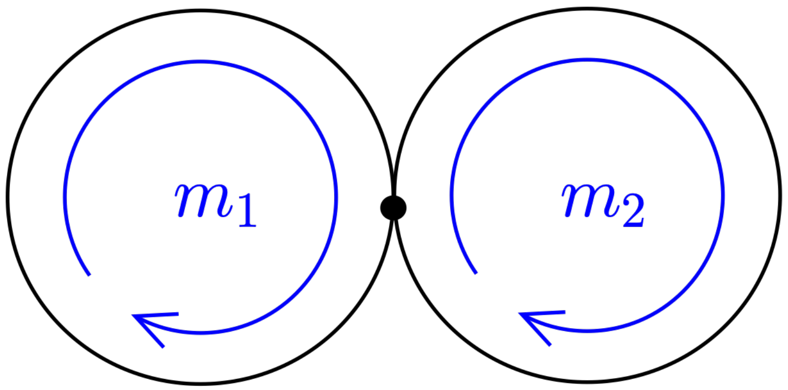


Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

2-loop以降（例：2-loop, 3-loop)

リンク=propagator, **vertex**



- $(m_1, m_2) = (m, 0)$ ➡single twist of propagator

$$S_{2-\mathrm{loop}}^{\mathrm{propag.}} = -\frac{V_{d-1}}{12} G_0(r=0)(3\lambda G_0(r=0))$$

- $(m_1, m_2) = (m, -m)$ ➡single twist of **vertex**

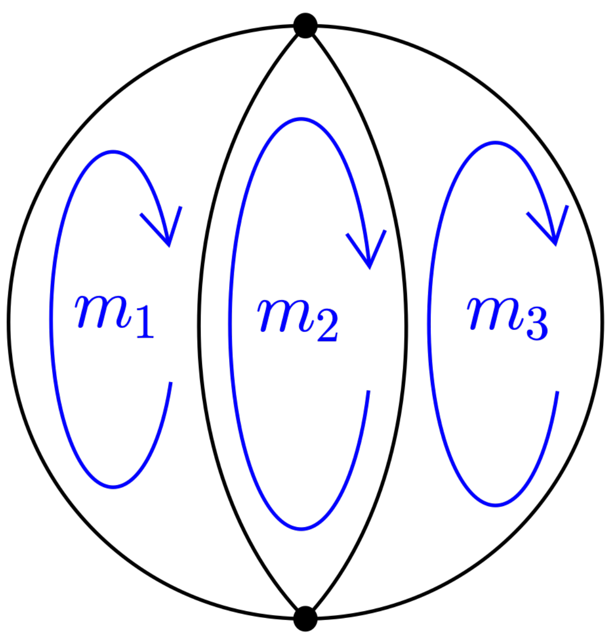
$$S_{2-\mathrm{loop}}^{\mathrm{vertex}} = -\frac{1}{4} V_{d-1} \lambda \int d^{d+1} r (G_0(r))^2 \ \delta^{d-1}(r_\parallel)$$

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

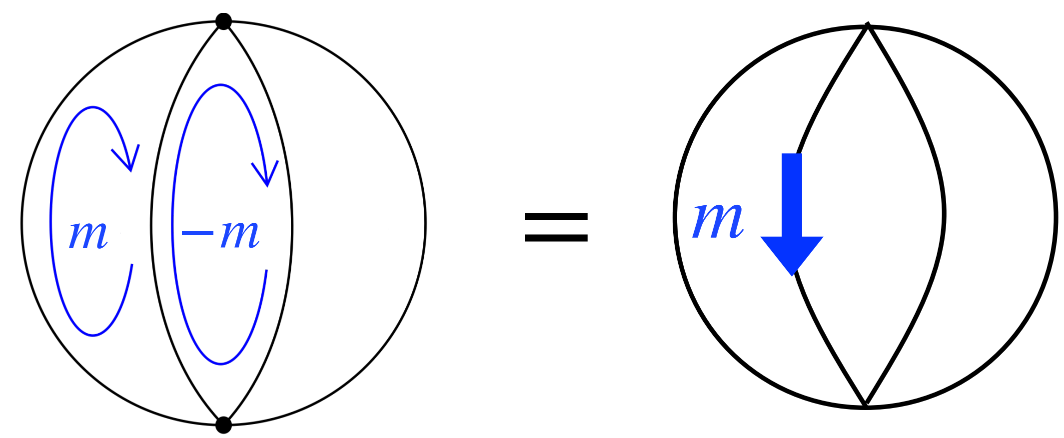
2-loop以降（例：2-loop, 3-loop)

リンク=propagator, **vertex**



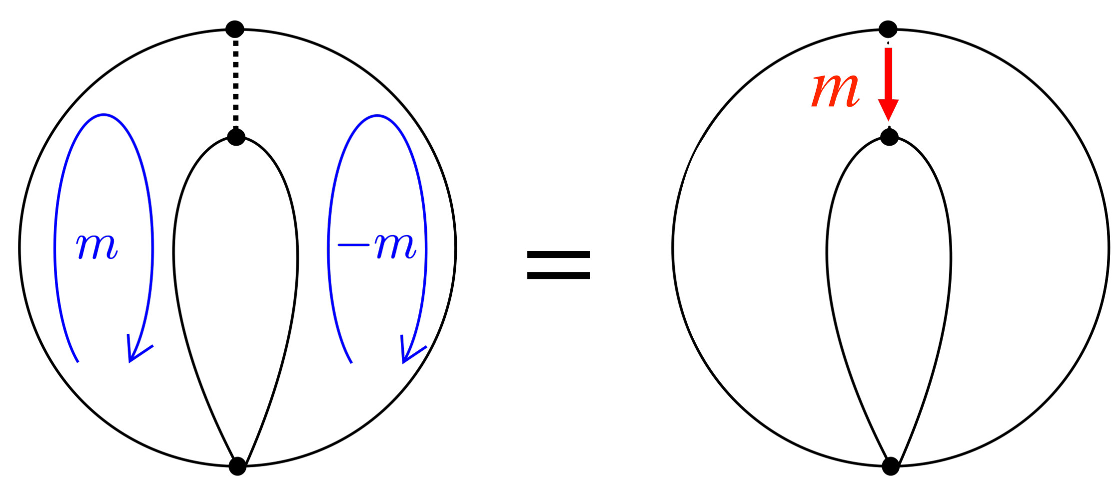
- $(m_1, m_2, m_3) = (m, -m, 0)$

➡single twist of propagator



- $(m_1, m_2, m_3) = (m, 0, -m)$ ➡single twist of **vertex**

$$\int dx \phi(x)^4$$
$$\to \int dx dy \phi(x)^2 \phi(y)^2 \delta(\hat{g}^m x - y)$$

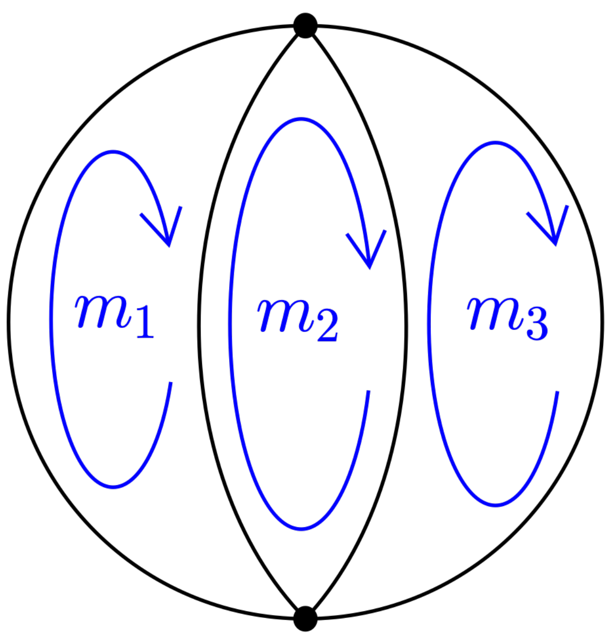


Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

2-loop以降（例：2-loop, 3-loop)

リンク=propagator, **vertex**



- $(m_1, m_2, m_3) = (m, -m, 0)$

➡single twist of propagator

$$S^{\text{propag.}}_{3-\text{loop}} = V_{d-1}\frac{3\lambda^2}{4}\int d^{d+1}r\ (G(r))^3 \int d^2\boldsymbol{X}(G(\boldsymbol{X}; r_\parallel))$$

- $(m_1, m_2, m_3) = (m, 0, -m)$ ➡single twist of **vertex**

$$S^{\text{vertex}}_{3-\text{loop}} = V_{d-1}\frac{3\lambda^2}{4}\int d^{d+1}r\ (G(r))^2 \int d^2\boldsymbol{X}(G(\boldsymbol{X}; r_\parallel))^2$$

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

- fluxを基本単位とするFeynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論の何が良いか？

✓ 結果がツイストのassignmentによらないことが明白

✓ Gaussianの寄与、non-Gaussianな新しい寄与を特定

↑ **propagatorのツイスト**　　↑ **vertexのツイスト**

Q. これらの寄与を足し上げるとどうなるか？

A. Gaussian部分は2PI有効作用 (Luttinger-Ward汎関数)を使えば良い

繰り込まれた2点関数で書ける！

Outline

1. レプリカ法とorbifold method

2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

3. 面積則の導出・解釈

4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与

5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

Outline

1. レプリカ法とorbifold method
2. $\mathbb{Z}_M$ orbifold上の相互作用する場の理論
   - Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論
3. 面積則の導出・解釈
4. 計算例：1-loop、2-loop、3-loop
   - propagatorと頂点からの寄与
5. EEにおける2点関数の繰り込み
   - 2粒子既約(2PI)有効作用
   - EEのGaussianの寄与

2粒子既約(2PI)有効作用

[Cornwall-Jackiw-Tomboulis, '74]

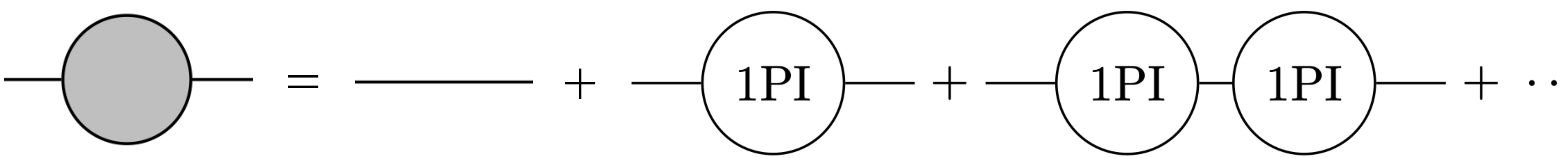
2PI定式化＝QFTにおいて2点のダイアグラムをfull orderでresumする方法

2PI有効作用 [Cornwall-Jackiw-Tomboulis, '74]

$$\Gamma = -\log Z = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(G_0^{-1}G - 1) - \Gamma_2[G] \quad (+\text{古典作用})$$

$G(x,y)$：繰り込まれた（フルの）2点関数　$\Gamma_2[G]$：2PI連結バブル

繰り込まれたグリーン関数はgap方程式より得られる：



$$\Longleftrightarrow G^{-1} = G_0^{-1} - 2\frac{\partial \Gamma_2}{\partial G}$$

繰り込まれた2点関数を使った EEのガウシアン部分の寄与

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

gap方程式より、Gaussianの寄与は

$$S_A^{\text{gaussian}} = -\frac{V_{d-1}}{12}\int^{1/\epsilon}\frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}}\log\left[\tilde{G}^{-1}(\mathbf{0};k_\parallel)\epsilon^2\right]$$

のみ！

残りは

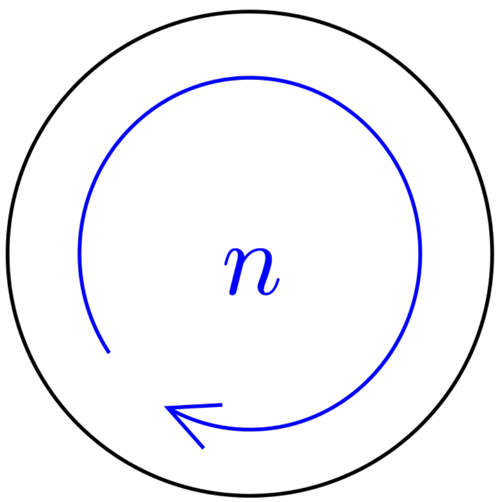
- 頂点からの寄与➡ダイアグラム毎には評価可能
- multiple twists➡おおよそ$O\left((M-1)^2\right)$でsubleadingのはず

相互作用がある場合のGaussian寄与があらわに分離された

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

例：EEの1-loopの寄与 [Nishioka, Takayanagi '07; He, Numasawa, et al. '14]



この場合はpropagator一つのツイストに等価

一つのツイストの足しあげ：$(M-1)^1$ in $F^{(M)}$

$$\because \sum_{j=1}^{M-1} \delta^2\left((1-\hat{g}^j)\boldsymbol{k}\right) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{\left|1-\hat{g}^j\right|^2}\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right)}{4\sin^2\frac{j\pi}{M}} = \frac{M^2-1}{12}\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right)$$

➡ナイーブには2つ以上のツイスト足しあげ＝$O\left((M-1)^2\right)$

leadingの寄与は一つのツイストから来るはず

どういう寄与か？→higher loops

$$\Rightarrow S_{1-\mathrm{loop}} = -\frac{V_{d-1}}{12}\int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log G_0^{-1}(k_{\parallel})$$

但し、$G_0^{-1}(k_{\parallel}) = k_{\parallel}^2 + m^2$

繰り込まれた2点関数を使った EEのガウシアン部分の寄与

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

gap方程式より、Gaussianの寄与は

$$S_A^{\text{gaussian}} = -\frac{V_{d-1}}{12}\int^{1/\epsilon}\frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}}\log\left[\tilde{G}^{-1}(\mathbf{0};k_\parallel)\epsilon^2\right]$$

のみ！

残りは

- 頂点からの寄与➡ダイアグラム毎には評価可能
- multiple twists➡おおよそ$O\left((M-1)^2\right)$でsubleadingのはず

相互作用がある場合のGaussian寄与があらわに分離された

まとめ

本研究（2103.05303）では、
有質量相互作用があるQFTでの半空間に対するEEを議論した

- orbifold methodを相互作用がある系へ拡張・定式化
- all orderでEE面積則の導出・局在modeとしての理解
- ツイストの取り方によらない定式化として
  Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論を提案

↓

- non-Gaussianな頂点の寄与の発見
- 2点関数の繰り込みによるall orderでのGaussianの寄与の分離

課題/展望

- 繰り込んだ頂点（多点関数）で書けるか？
  →nPI形式が確立されれば…？
- 頂点からの寄与の理解
  →補助場を導入すると一部はその1-loopと理解できる
- 複数ツイストが本当にsubleadingか、その解析的評価
- $\mathbb{Z}_M$ゲージ理論としての理解
  - ゲージ不変量のfluxの足しあげを直接評価できるか？
- 拡張
  半空間以外？higher spins?非相対論？有限温度？曲がった背景時空？励起状態？

Pinning of propagator at the orbifold fixed point

- twisted propagatorを重心座標と相対座標で書くことにより、single twistは系の並進対称性より重心座標が原点にピン留めされることがわかる

$$G_0(\hat{g}^n x - y) = G_0(\hat{g}^{n/2}\boldsymbol{x} - \hat{g}^{-n/2}\boldsymbol{y}; r_\parallel) = G_0(\cos\theta_n r_i + 2\sin\theta_n \epsilon_{ki} X_k; r_\parallel)$$

$$= e^{\cot\theta_n \hat{R}_X/2} G_0(2\sin\theta_n \boldsymbol{X}; r_\parallel),$$

where $\hat{R}_X = \epsilon_{ij} r_i \partial_{X_j}$, $r = x - y$, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})/2$ and $\theta_n = n\pi/M$.

さらに

$$G_0\left(2s_n\boldsymbol{X}; r_\parallel\right) = \frac{1}{4\sin^2\theta_n}\int \frac{d^2\boldsymbol{k} d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d+1}} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X} + ik_\parallel\cdot r_\parallel}}{\left(\boldsymbol{k}^2/4\sin^2\theta_n\right) + {k_\parallel}^2 + m^2}$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\theta_n}\int \frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} e^{ik_\parallel\cdot r_\parallel} \frac{1}{\left(-\partial_X^2/4\sin^2\theta_n\right) + {k_\parallel}^2 + m^2}\delta^2(\boldsymbol{X})$$

Note:
G_0でなくても、一般の並進不変な$f(x-y)$に対して成立

オリジナルの系に並進対称性があれば、一つしかツイストしてなければ、積分中のtwisted propagator以外は相対座標rにしかよらない

→部分積分で$\partial_X = 0 \Rightarrow \hat{R}_X = 0$　この場合は　$G_0(\hat{g}^n x - y) \to \dfrac{1}{4\sin^2\theta_n}\delta^2(\boldsymbol{X})\displaystyle\int \frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} G_0(k_\parallel)$

Feynmanダイアグラム上の$\mathbb{Z}_M$ゲージ理論

[S. Iso, **TM**, K. Sakai 2021]

例：EEの1-loopの寄与　　[Nishioka, Takayanagi '07; He, Numasawa, et al. '14]

$$F_{1-\mathrm{loop}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}^{(M)} \log G_0^{-1\ (M)} = \frac{V_{d-1}}{2M}\int \frac{d^2\boldsymbol{k}\ d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} \ln(k^2+m^2)\left(\frac{V_2}{(2\pi)^2} + \sum_{j=1}^{M-1}\delta^2\left((1-\hat{g}^j)\boldsymbol{k}\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{M-1}\delta^2\left((1-\hat{g}^j)\boldsymbol{k}\right) = \sum_{j=1}^{M-1}\frac{1}{\left|1-\hat{g}^j\right|^2}\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right) = \sum_{j=1}^{M-1}\frac{\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right)}{4\sin^2\frac{j\pi}{M}} = \frac{M^2-1}{12}\delta^2\left(\boldsymbol{k}\right)$$

$$S_{1-\mathrm{loop}} = -\frac{\partial}{\partial M}\left[MF_{1-\mathrm{loop}}\right]\Big|_{M\to 1} = -\frac{V_{d-1}}{12}\int\frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}}\log G_0^{-1}(k_\parallel)$$

但し、$G_0^{-1}(k_\parallel) = k_\parallel^2 + m^2$