N体とダークマター

牧野淳一郎
国立天文台理論研究部/天文シミュレーションプロジェクト

CfCA
Center for Computational Astrophysics

概要

- ダークマターの従う方程式
- 自己重力多体系の基礎概念
- 衝突系と無衝突系
- N 体計算の意味
- ダークハローの構造
- 最小サイズハロー

ダークマターの従う方程式

ダーク $=$ (宇宙初期のすごく密度が高い時以外は) 重力以外の相互作用は無視できる

つまり: ダークマターは重力だけで相互作用する多粒子系とみなせる。

- 運動方程式: ニュートンの運動方程式
- 相互作用: ニュートン重力

ものすごく大きな空間スケールだとニュートン重力では×な気がするが、そんなところはどうせ線形領域。

ダークマターの構造形成シミュレーション

アニメーション1　アニメーション2

こういうので、

- どういう原理で
- なにをやっているのか
- どんなことがわかるか
- わかったと思っていることは本当か？

というような話をします。

原理的な問題

ダークマター粒子: 何かわからないけど素粒子。

シミュレーションで使う粒子: 一番小さいので太陽質量の 1000 倍くらい。

粒子の質量は 50 桁くらい違う。これで何をしていることになっているのか？

有限粒子系と連続近似

重力多体系の運動方程式：

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} f_{ij} \tag{1}$$

x_i と m_i は粒子 i の位置と質量、 f_{ij} は粒子 j が粒子 i に及ぼす力。

重力多体系なら f_{ij} はニュートン重力

$$f_{ij} = G m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \tag{2}$$

G は重力定数。

無限に速い計算機があれば、 10^{50} 個の粒子で数値解を、、、、

これは全然無理。どうするか？

連続近似

- 理論的な扱いは大抵有限自由度系より無限系のほうが簡単。
- 10^{50} 個とかいうと結構無限に近いので、振る舞いが連続近似で十分よいかも

というわけで連続分布を考える。

連続近似での基礎方程式-(無衝突)ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{3}$$

f:6 次元位相空間での質量分布関数 Φ :重力ポテンシャル, 以下のポアソン方程式の解

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \tag{4}$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = \int dv f, \tag{5}$$

ボルツマン方程式の直観的意味

直観的な意味:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

要するに 6 次元位相空間でのラグランジュ微分 Df/Dt

で、これが $= 0$: ハミルトン系の位相空間上での流れでは体積が保存、というのと同じ。

力学平衡

自己重力系の力学の「もっとも重要な」概念

無衝突ボルツマン方程式とポアソン方程式を連立させたものの定常解

ある分布関数 f とポテンシャル Φ が力学平衡にある＝

- Φ は f から求めた空間での質量密度を右辺とするポアソン方程式の解
- 無衝突ボルツマン方程式にこの Φ を入れると f の時間微分が 0 になる

流体との違い

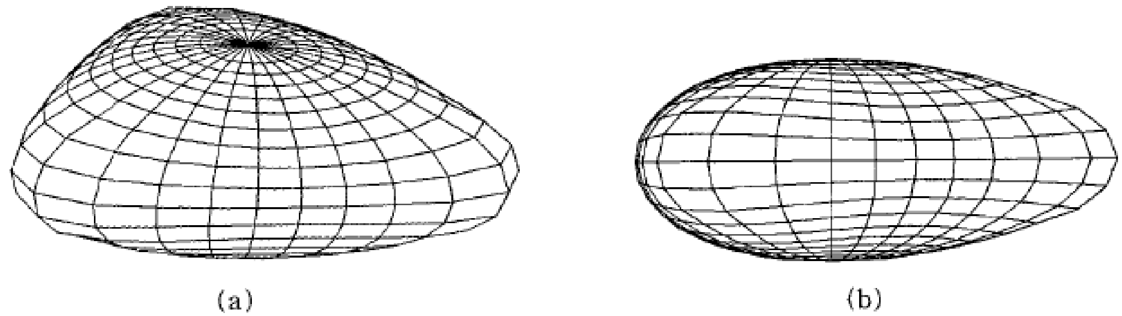
自己重力流体の平衡形状

- 回転なし＝球対称: 静水圧平衡、状態方程式が決まれば決まる
- 回転あり: さらに回転則もいれればきまる。

重力多体系: 回転がなくても変な形のものが作れる。方向によって速度分布が違ってよい (流体の言葉だと圧力が非等方)、また等温とか、熱伝導で状態方程式が決まるとかいうことも必ずしもない。

回転していれば流体でも、、、

一様回転する流体の平衡形状の例



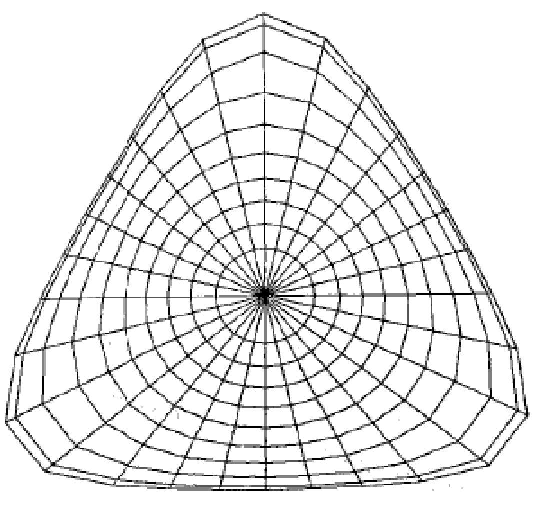


Fig. 2. A shape of the Triangle equilibrium just preceding to the mass-shedding. (a) Seen from the direction of $\theta=70^\circ$ and $\phi=45^\circ$. (b) Seen from y-axis direction. (c) Seen from z-axis (rotation axis) direction.

Hachisu and Eriguchi 1982 から「三角おにぎり」

回転していれば流体でも、、、

一様回転する流体の平衡形状の例

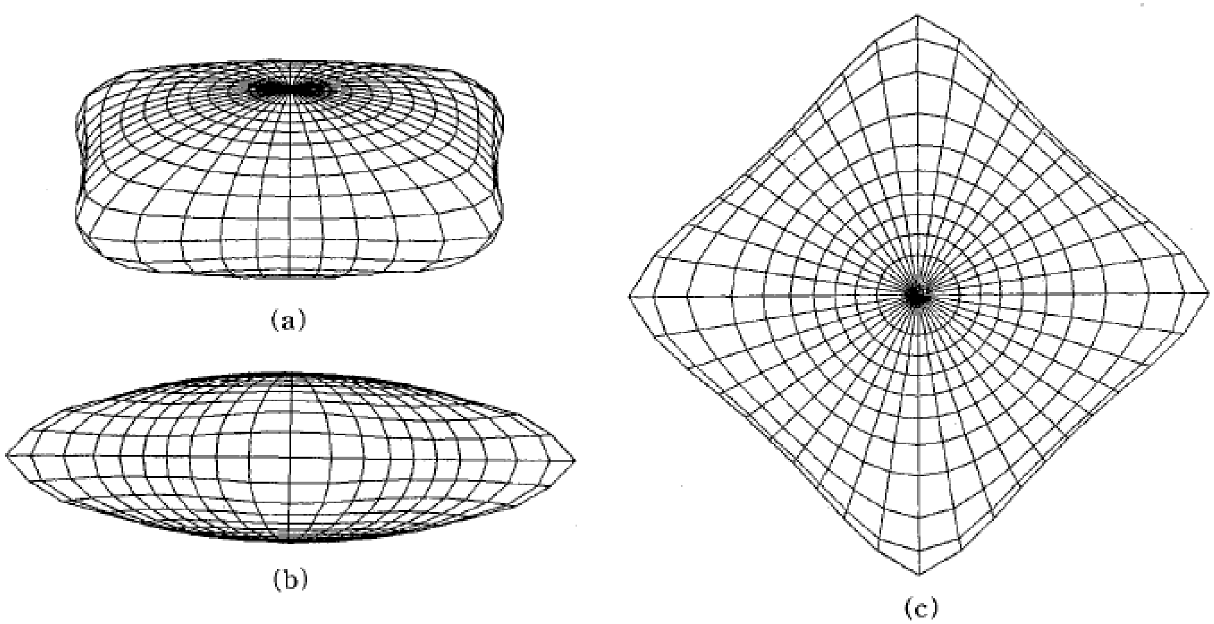


Fig. 3. Same as Fig. 2 but for the Square sequence.

Hachisu and Eriguchi 1982 から「回転座布団」

ジーンズの定理

「運動の積分」というものについて以下の「ジーンズの定理」がなり立つ。

ジーンズの定理: 与えられたポテンシャル Φ の下での無衝突ボルツマン方程式の任意の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

つまり

分布関数 f が定常である $\leftrightarrow$ 運動の積分 $I_1, I_2, ..., I_m$ があって $f = f(I_1, I_2, ..., I_m)$ の形で書ける

これはとても基本的で重要な定理

運動の積分って?

ポテンシャル Φ のもとで、ある x, v の関数 I が運動の積分であるとは、その上での粒子の運動に対して

$$\frac{d}{dt}I(x,v) = 0, \tag{6}$$

がなり立つこと。

つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量が変化しないということ。要するに、エネルギーとか、球対称なら角運動量とか。

ちょっと変形すれば

$$v \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial v} = 0 \tag{7}$$

無衝突ボルツマン方程式の定常解と同じ式

球対称の場合

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の 3 成分で 4 つ。

一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っていい。

意味がある特別な場合: ケプラー軌道のような、軌道が閉じる場合。

この時には、エネルギーと角運動量の他に、軌道全体の向きを表す量（近点経度、ラプラス・ルンゲ・レンツ・ベクトル）が保存する。これはちゃんと保存量になっている。

普通の球対称ポテンシャル

　一般には軌道が閉じない。
　近点経度に対応するような保存量は実は存在している
　でも、ある軌道はエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆ってしまう
　（数学的には、もちろんすべての点を覆えるのではなく、任意の点について、いくらでも近くにいけるというだけだが）。
　その保存量に分布関数が依存すると、連続性とか微分可能性とかに困難を生じる。あんまり物理的ではない。

$f(E, J)$

　球対称だと f はエネルギー E と角運動量ベクトル J による
　球対称なので f は J の方向に依存しない $\longrightarrow$ 絶対値だけに依存する
　球対称の分布関数は一般に $f(E, J)$ と書ける。
　これが無衝突ボルツマン方程式の平衡解になっていれば、無限の時間たってもなにも起きないはず。

有限粒子系の場合

例えば、球対称で力学平衡な分布関数を有限個の粒子で近似したとする。あるいは、実際に存在する銀河や星団を考えてみる。

一つの星の軌道はどうなるか？

- 重力場全体: それぞれの星が動くので、完全に一定にはならない
- 近くの星: たまたま近くにくると重力で軌道を曲げる

近接遭遇

系の半径が 1、質量も 1、重力定数も 1、となるような単位系で考えると、粒子の速度は 1 程度。

粒子の速度が大きく変わるような近接散乱: 粒子数が N として、距離が $1/N$ 程度まで近づく (ポテンシャルエネルギーが運動エネルギーの程度になる) 必要あり。

一回起こるまでに時間が N くらいかかる。

場のゆらぎ

N 個の粒子が勝手に動くので、ある点での重力ポテンシャルは $1/\sqrt{N}$ 程度揺らぐはず。

ゆらぎの時間スケールは典型的な粒子の軌道周期程度。

1 つの粒子のエネルギーも単位時間に $1/\sqrt{N}$ 程度揺らぐはず。

やはり N 程度の時間がたつと大きくエネルギーが変わる。

両者の関係

どちらも同じくらい効く。実は中間的な距離スケールも効く。

ちゃんと計算すると、粒子の軌道が変化する時間スケールは $N/\log N$ 程度になる。

これは「熱力学的」な進化をうながす。つまり、エントロピーを生成して系を熱平衡に向かわせる

いわゆる「2 体緩和」、「衝突項」

有限粒子系と連続近似の違い

というわけで、重要な違い:

- 連続近似 (無衝突系) では時間発展しない力学平衡状態でも、有限粒子系では熱平衡に向かう進化をする
- 進化のタイムスケールは $N/\log N$ に比例、粒子数が大きいと長い

(但し、熱平衡状態は一般には存在しない)

現実の系と連続近似とシミュレーション

現実の系が無衝突系とみなせる場合:

1. 現実の系を粒子数無限の系で近似
2. 粒子数無限の系を現実よりもっと少ない粒子数の系で近似

- 誤差はステップ (2) のほうがずっと大きいので、こっちを考えておけばよい「はず」
- 銀河シミュレーション、宇宙論的シミュレーションはこっち、というのが常識

他の方法は？

　無衝突ボルツマン方程式は偏微分方程式。差分法では解けないのか？

　位相空間は次元数が多い、というのが問題

- 空間 1 次元、並進対称: 位相空間 2 次元。これならできる
- 空間 1 次元球対称: 位相空間 3 次元。最近ならできなくもない
- 空間 2 次元軸対称: 位相空間 5 次元。うーん
- 空間 3 次元: 位相空間 6 次元。うーーーーん

1 次元と 2 次元の間に越えられそうにない壁

計算精度について

重要なこと:「粒子数が少ないことによる2体緩和」は本質的には他の計算誤差と同じ、「数値的な誤差」

他の誤差(時間積分の誤差とか、相互作用の計算の誤差)は、結果への影響が2体緩和よりも小さければ十分。それ以上に精度を上げるのはあまり意味がない。

ツリー法とか$\mathrm{P^3M}$とかの、割合いい加減そうな方法でもよいのはそういう理由。

但し、2体緩和の誤差はランダムと思ってよい(時間のリニアでつもらない)ので、その辺注意必要。

ローカルな緩和時間

構造をもつ系なら、緩和時間は局所的な速度分散、密度で一応書ける。

速度変化が自分の速度 (まわりの速度分散) 程度になる時間:

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \tag{8}$$

となる。

$\log \Lambda$ はクーロンロガリズムといわれる量。自己重力系だと $\log N$ 程度。

今、$\log \Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の 3 乗、数密度の逆数、質量の 2 乗の逆数に比例する

銀河円盤の場合

- 速度分散: $50\mathrm{km/s}$ とか(回転速度の $1/5$ 程度)
- 密度: 球対称と思った時の数十倍(恒星ディスクの厚さ $500\mathrm{pc}$ くらい)

球対称として計算した時より 4 桁くらい短くなる。さらに、

- 巨大分子雲
- アーム構造自体

が星を散乱する。また、細かく分解できれば、星はおそらく全部最初は集団で、つまり星団としてできている。このような星団の緩和は銀河円盤の構造に大きな影響をもつかも

銀河円盤のシミュレーションの例

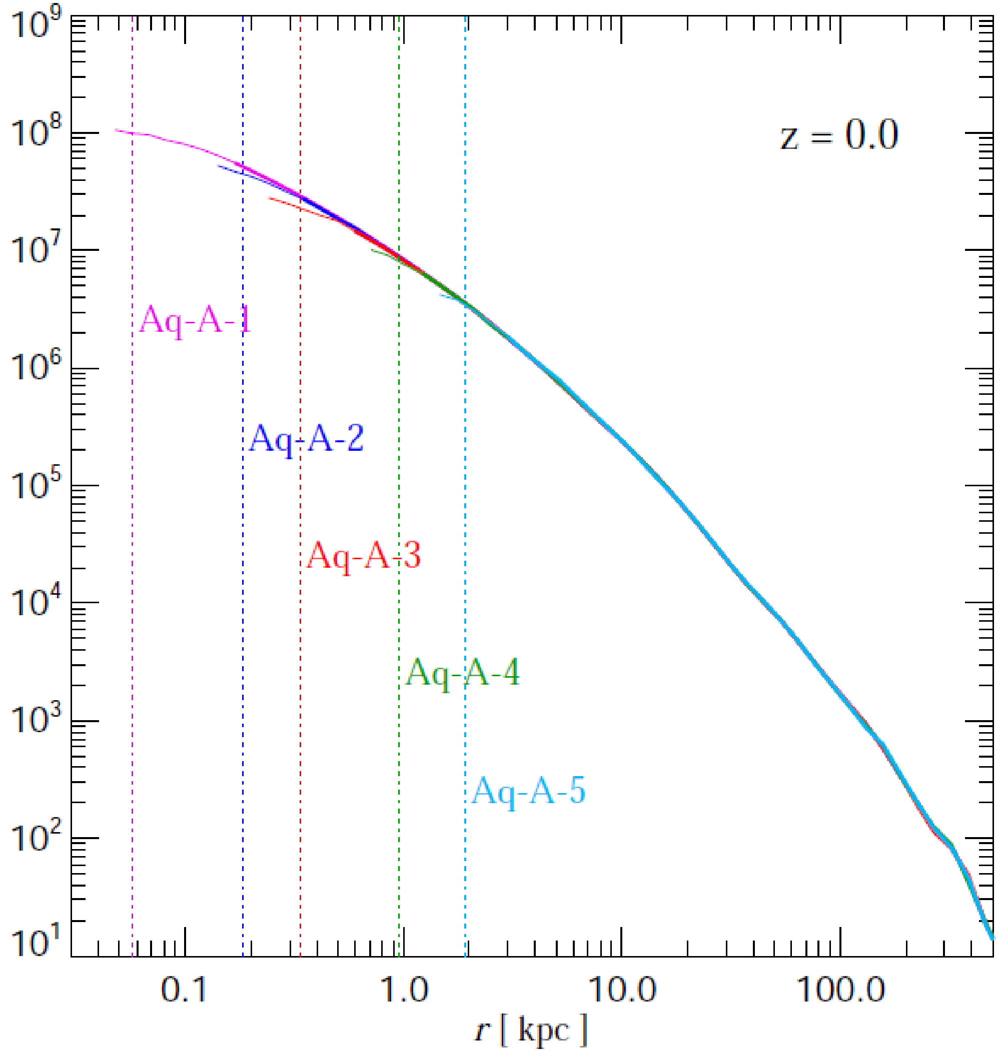
アニメーションa1

アニメーションa2

アニメーションb1

- 軸対称モードに対しては安定なはず (a1, a2)
- スパイラル構造ができる
- どんどん成長するわけでもないし、消えるわけでもない

ダークマターハローの構造

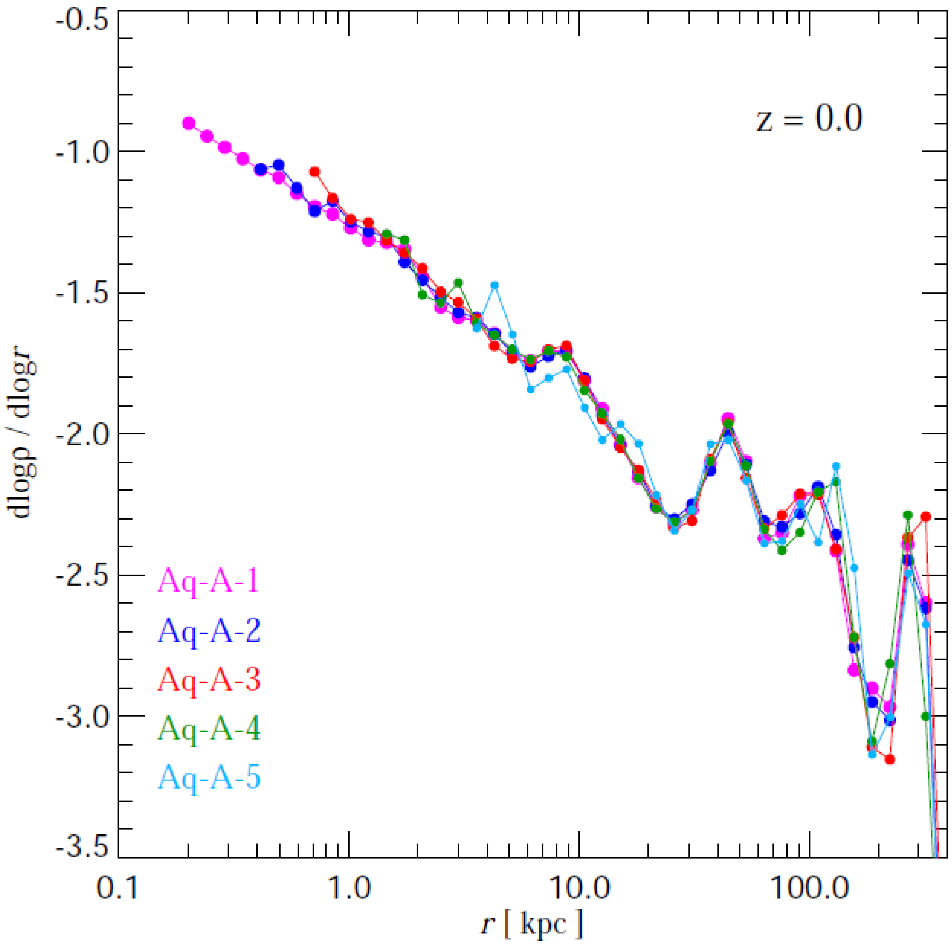


現時点で最大粒子数、最高分解能の計算: Springel et al (2008)

粒子数を3桁変えてチェック

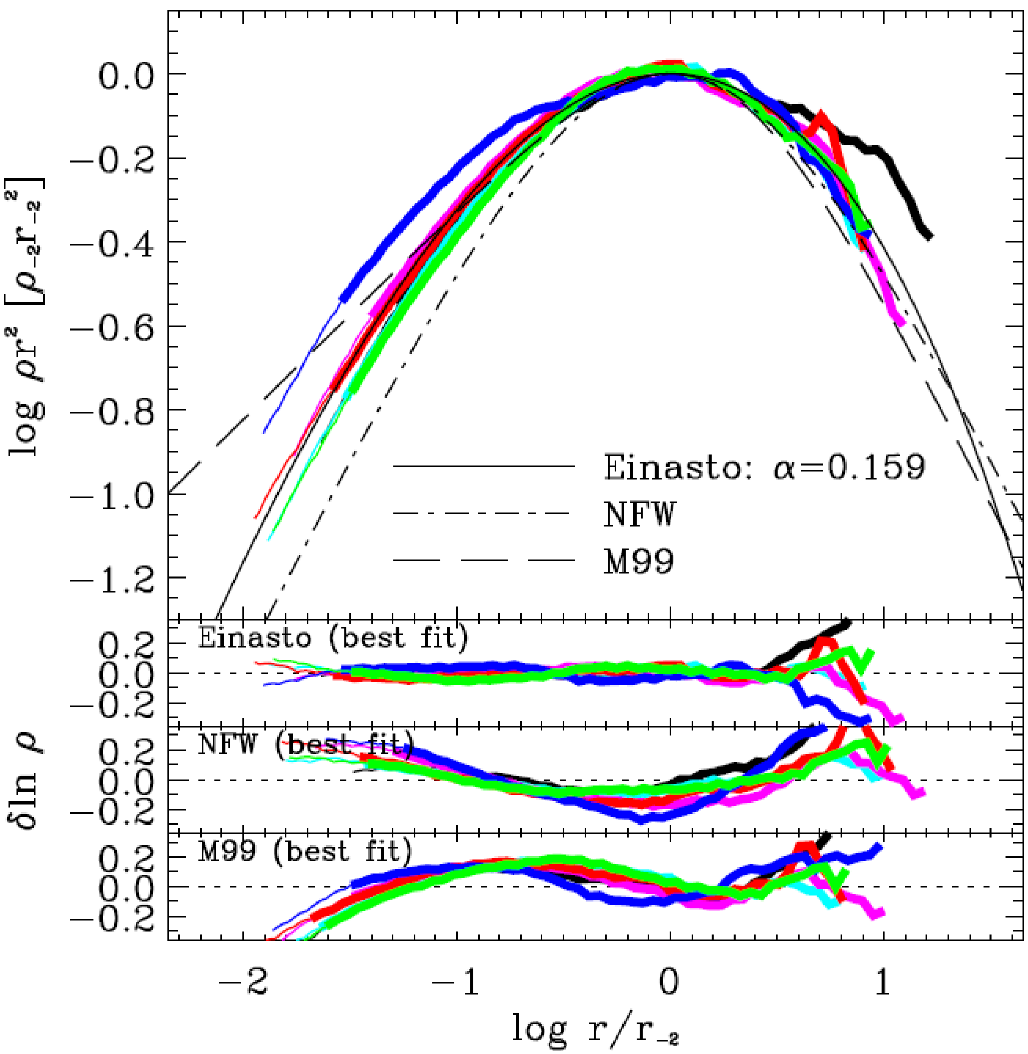
それなりに収束？

密度のべき



計算の範囲ではいかなるべきでもない。

NFW プロファイル他



Navarro et al. 2008 (not accepted yet?)

NFW: $\dfrac{1}{r(1+r)^2}$

Moore99: $\dfrac{1}{r^{1.5}(1+r^{1.5})}$

Einasto: $\exp[(-2/\alpha)(r^{\alpha}-1)]$

歴史的経緯

- 1996 年: NFW 論文、「初期ゆらぎのパワーやコスモロジーによらず、ダークマターハローの密度分布は NFW プロフィルで書ける」
  - 根拠は 1 万粒子くらいの計算
  - 緩和時間とかから、信頼性は×
- 1997 年: Fukushige and Makino: 「100 万粒子くらい使ったら中心のべきはもっと深かった」
- 1999 年: Moore et al. 「300 万使ったらやっぱり深い」、Moore99 プロフィル
- その後現在まで: 粒子数さらに 3 桁上昇、「NFW は正しくない (Navarro はそうはいわないが) が、ずっと中心では Moore99 より浅くなるっぽい。」

まとめると、、、

- ダークマターカスプの中心付近の密度構造は、「なんだか不思議なもの」
- 単純なべきではない。が、どこまでもべきが下がるかどうかも不明。
- 緩和時間の見積もりでは計算はあっているっぽいが、、、、

現在のところ、数値計算の結果が本当かどうかは？

- 初期ゆらぎ自体はほぼべき乗なものがはいっている。
- 粒子の質量以外に特徴的なスケールはない。

理論的な問題点

- 数値計算の結果はあっても、それを理解できる理屈がついてない
  - それ以前に、とても理屈がつきそうにない不思議な結果になっている
  - 分解能を上げると結果が大きく変わってきた
- そもそもこのやり方は原理的に大丈夫？

もうちょっと現実的な話

銀河サイズのダークマターハローの中心 $1\ \mathrm{kpc}$ 以外の構造に、観測的になんか意味はあるのか？

- ない: その辺はどうせバリオンの影響のほうが大きい
- ある: もっと小さい、バリオンをトラップしてない本当にダークなハローなら。
- 対消滅で γ 線がとかいう話だと中心プロフィルのべきが大問題(バリオンの影響が無視できるとして)

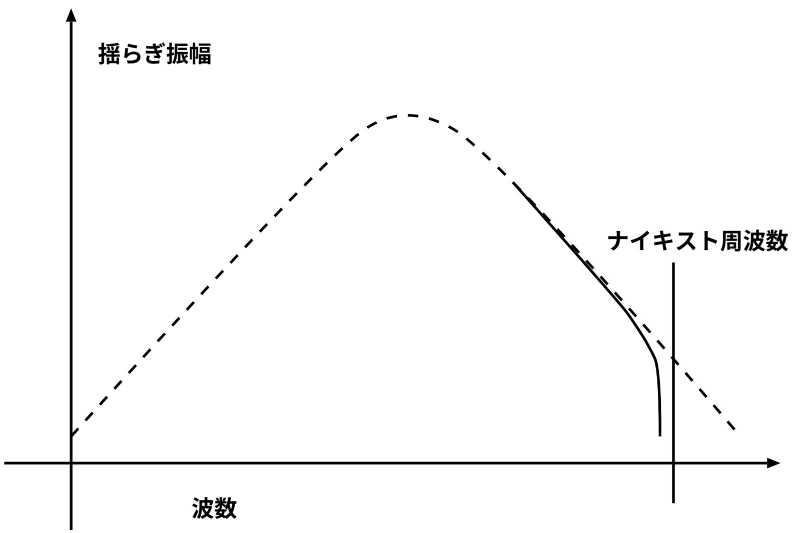
原理的な問題

宇宙論的 N 体シミュレーションは、「無衝突系」の正しいシミュレーションになっていない

初期条件の作り方:

1. 一様に粒子を置く (格子/グラス)
2. 密度ゆらぎのパワースペクトル (粒子間距離の倍とかの波長でカットオフ) に従って、ランダムなゆらぎを発生させ、粒子を線形成長解に従って動かす

最小の構造



　CDM だと小さいものが先にできる ＝ 最初にできる「ハロー」は粒子 10 個程度

　(私を含む) 業界の信念: 階層的な合体成長のプロセスが構造を決めているので、最小の構造がちゃんと計算できているかどうかは結果に影響しないはず

　誰かが確かめたわけではない

確かめる？

原理的には、確認は簡単。

- 初期ゆらぎのカットオフ波長を固定して
- 粒子数 (質量分解能) を数桁くらいふってシミュレーションする

現実的な問題:

- ものすごい計算時間がかかる。
- その割に地味な仕事。論文数稼げない (Aquarius 1 つで何本論文書いてるか、、、)

最小ハローの構造

カットオフがナイキスト周波数より大きな計算で、宇宙物理学的に意味がある話＝最小ハローの構造

現実のダークマター: free streaming によるカットオフ波長がある、というのが常識的なモデル (波長はどんな粒子かによるが、例えば地球質量くらい)

最小質量ハロー: 地球質量くらい、大きさは 100 AU くらい。

- このハローはどんな構造か
- 太陽近傍で生き残っているのか

最小ハローの構造を考える意味

主な問題:生き残っているかどうか

これは観測可能性には極めて大きな影響

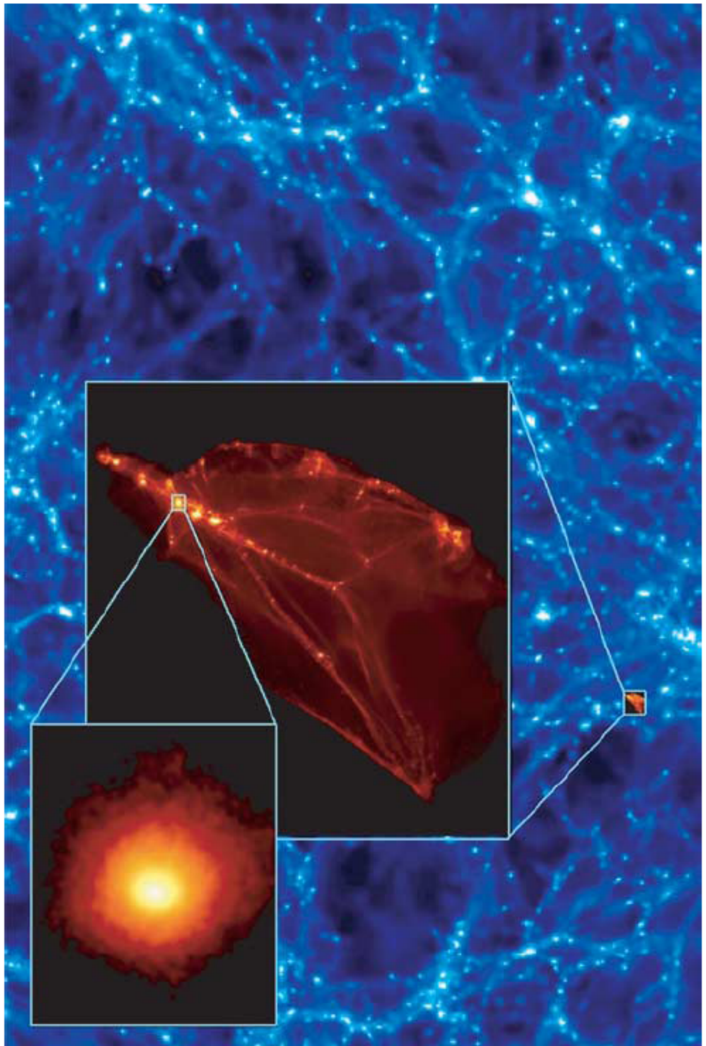
- 直接検出: 密度が平均密度とは違う、、、、
- 対消滅: 生き残っていれば圧倒的な寄与

生き残るかどうかを決める要因

- 合体成長の過程で少し大きなハローに吸収されてなくなる
- ずっと大きなハローの中でも、潮汐破壊される
- 恒星等によって潮汐破壊される

いずれにしても、中心部分の構造が本質的に重要なはず。

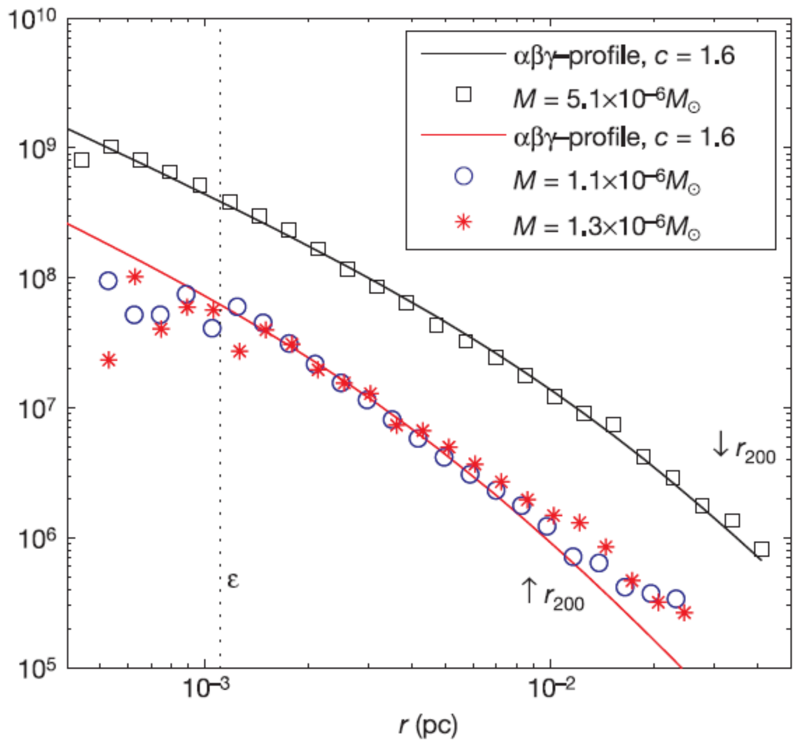
これまでの研究



といってもほとんどこれだけ:
Diemand et al. 2005, Nature 433, 389

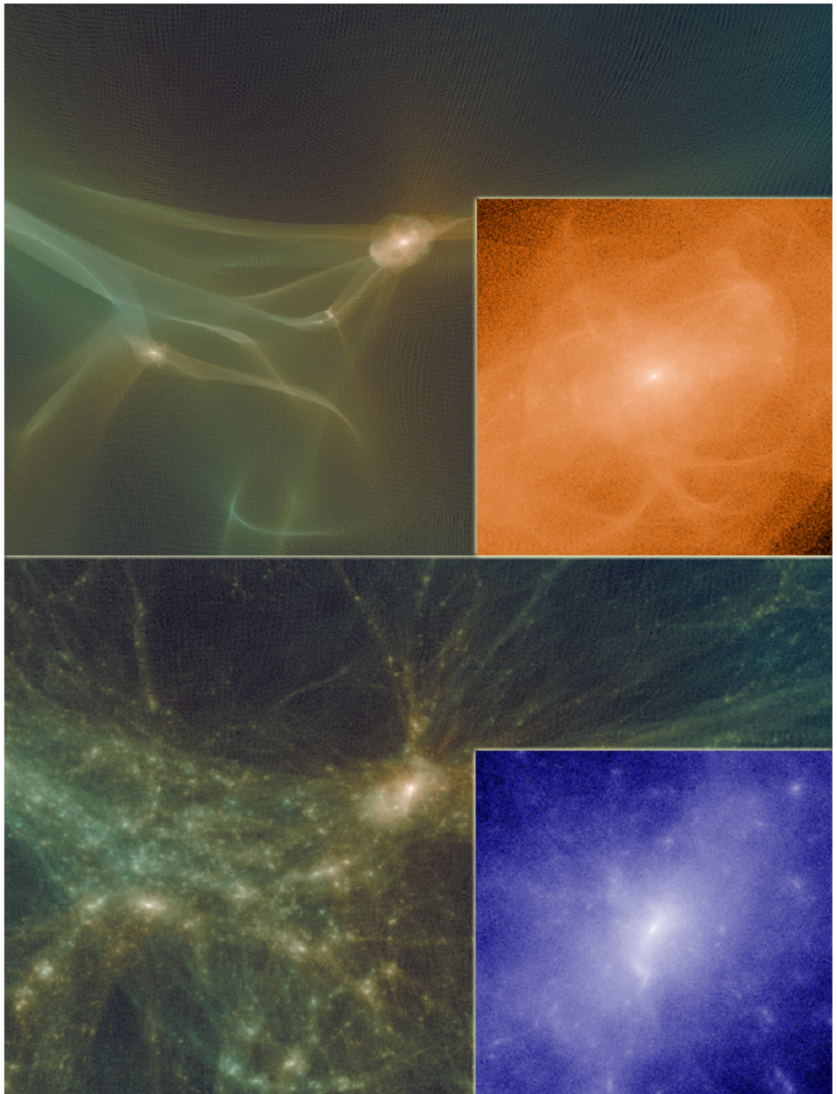
基本的に普通の宇宙論的シミュレーション
地球スケールのハローを 10^4 粒子くらいで分解

密度分布



- NFW の元々の分解能が悪い計算と変わらない
- 粒子数が少ないからまあ当然
- 多分全然間違っている

我々も計算してみた



Ishiyama et al., in preparation. (間に合えば博士論文の一部)

Diemand et al. の 100倍の粒子数。

- 上:カットオフあり
- 下:カットオフなし (比較用)

結果はまだ色々解析中。

まとめ

- N 体シミュレーションは、強い非線型領域でのダークマターハローの構造を理論的に調べる、現在のところ唯一の実用的な方法
- 銀河、銀河団サイズのシングルハローの構造については、この 10 年間に「理解が進んだ」というよりは混乱が深まった
  - NFW プロファイルはあわない
  - それ以前に、数値計算の結果は中心がカスプ (一定のべきをもつ) になっていない
  - しかし、そんな結果は信じ難い

まとめ(続き)

- 最小サイズハローについては、計算量的には「正しい」計算が可能になってきているはず
- まだまともな計算結果はない
- 年末くらいにはお話できるといいな

というわけで

重力多体系の研究の当面の課題:
十分に大きな粒子数で計算できるようになること
そのためには:

- 高速で
- 正確な

計算法、実装、その他もろもろ、、、
が必要

おしまい